12 pang.

QUESTIONI

RIGUARDANTI

LE MATEMATICHE ELEMENTARI

RACCOLTE E COORDINATE

DA

FEDERIGO ENRIQUES

12163

PARTE PRIMA

CRITICA DEI PRINCIPII

VOLUME I. ARTICOLI DI

U. AMALDI - F. ENRIQUES - F. GUARDUCCI - G. VAILATI - G. VITALI

TERZA EDIZIONE

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

EDITORE

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

QUESTIONI

RIGUARDANTI

LE MATEMATICHE ELEMENTARI

RACCOLTE E COORDINATE

DA

FEDERIGO ENRIQUES

PARTE PRIMA

CRITICA DEI PRINCIPII

VOLUME I - ARTICOLI DI

U. AMALDI - F. ENRIQUES - F. GUARDUCCI - G. VAILATI - G. VITALI

TERZA EDIZIONE

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

EDITORE

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

QUESTIONI

RIGUARDANTI

LE MATEMATICHE ELEMENTARI

RACCOLTE E COORDINATE

DA

FEDERIGO ENRIQUES

PARTE PRIMA

CRITICA DEI PRINCIPII

VOLUME I - ARTICOLI DI

U. AMALDI - F. ENRIQUES - F. GUARDUCCI - G. VAILATI - G. VITALI

TERZA EDIZIONE

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

EDITORE

Digitized by Google

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

Bologna - Stabilimenti Poligrafici Riuniti - VII - 1924

Digitized by Google

Math.
Liberma
9-16-25
12163
2v.

PREFAZIONE

La raccolta delle Questioni riguardanti la Geometria elementare, *apparsa per la prima volta nel 1900 ed allargata sotto il nome di* Questioni riguardanti le Matematiche elementari *nei due volumi del 1912-1914, esce ora in una terza edizione interamente rifatta secondo un disegno organico ancora più vasto: che vuole rispondere non soltanto a uno sviluppo d' idee, sì anche al posto che quest'ordine di problemi ha preso ormai nella preparazione dei docenti delle scuole italiane. Poichè tutte le riforme recenti della Scuola, nei suoi diversi gradi — in particolare l'istituzione di un corso di Matematiche complementari per le cosidette lauree miste, e gli esami di Stato in cui la cultura dei candidati dovrà essere in gran parte saggiata traverso le questioni che toccano l'insegnamento secondario — mettono in valore l'indirizzo dell'opera nostra.*

E consentono allo sviluppo che essa riceve in quest' edizione, tendente ad appagare il bisogno più sentito di dare alla teoria scientifica una base storica.

Altre pubblicazioni, che stiamo approntando, ed in primo luogo quella degli Elementi *d'* Euclide *accompagnati dalla critica antica e moderna, dovranno offrire ciò che occorre ad un esame comparativo dei testi scolastici. Ma il docente che apprenderà in tal guisa una maniera razionale di giudizio, vorrà ritrovare la stessa comprensione storica della scienza anche nella veduta superiore delle questioni che qui viene offerta. Perciò gli articoli di carattere più esclusivamente logico o filosofico — e in particolare i miei propri sui principî della geometria e sul concetto del numero — sono stati rifatti in questo senso, ed, in rapporto allo scopo, anche il loro ordine è stato radicalmente cambiato. Inoltre sono state prese in considerazione da nuovi collaboratori alcune nuove questioni, che troveranno posto nei volumi successivi della raccolta.*

Digitized by Google

Tutto questo rimaneggiamento d'un'opera che, ormai per lunga consuetudine, accompagna e dirige lo studio dei nostri migliori docenti di Matematiche, procede dai corsi speciali che per la preparazione di essi sono stato chiamato ad impartire, nei due anni scolastici decorsi, all'Università di Roma. Perchè ogni volta che si cerca di spiegare ai giovani come la scienza universitaria si colleghi alle materie dell' insegnamento secondario e valga ad avvantaggiarne il possesso, cioè ogni volta che si vuole trasformare la dottrina in cultura o in abito e facoltà delle menti, sempre si è condotti a vedere metodi e problemi nella loro evoluzione storica. Al lume della quale la coscienza didattica, che ha dismesso gli abusi del logicismo, apprende veramente a superare *il periodo di quella critica troppo arida ed angusta, senza ricadere nei vecchi errori che ne costituirono il giusto motivo.*

Non giova dissimularlo: diverse circostanze minacciano oggi di menomare la scienza e la cultura matematica, che è vanto e tradizione d'Italia, se non forse nell'eletto manipolo degli studiosi dediti alla ricerca originale, almeno nella schiera più numerosa di coloro che hanno l'alto compito di diffonderla nella scuola. Poichè, da una parte, i corsi universitarii del primo biennio si sono venuti trasformando in questi ultimi anni per avvicinarsi agli scopi pratici degli ingegneri; e, d'altra parte, l'abbinamento sistematico delle cattedre di matematiche e di fisica nelle scuole medie — che non si addice a tutte le intelligenze — toglierà ai molti il tempo e l'occasione di approfondire certe dottrine altamente educative. Tali circostanze sono state presenti ai redattori di questa raccolta, per esempio là dove i problemi che toccano i fondamenti della geometria vengono messi in rapporto colla geometria proiettiva.

Infine abbiamo lavorato col proposito di offrire ai nostri studenti e docenti un'opera di preparazione e di confronto, alla quale essi possano attingere non soltanto notizie largamente utilizzabili, sì anche una veduta comprensiva del progresso delle idee matematiche: che, oltre ad educare il giudizio del maestro, può illuminare la ricerca più elevata e aprire anche il campo fruttifero dell'investigazione storica ad un più vasto numero di studiosi.

Roma, Dicembre 1923.

FEDERIGO ENRIQUES.

Digitized by Google

QUESTIONI

RIGUARDANTI

LE MATEMATICHE ELEMENTARI

VOLUME PRIMO

Digitized by Google

Digitized by Google

ARTICOLO PRIMO

L'evoluzione delle idee geometriche nel pensiero greco: punto, linea e superficie, di FEDERIGO ENRIQUES a Roma.

§ 1. Gli « Elementi » d' Euclide. — Ogni discussione sui principî delle matematiche fa capo agli « *Elementi* » *d'Euclide*, che costituiscono il più antico Trattato di questa scienza, a noi pervenuto. EUCLIDE viveva ad Alessandria ai tempi del re Tolomeo e quindi la sua opera si può collocare approssimativamente nel 300 a. C. In essa trovano posto nozioni di geometria e di aritmetica, in guisa da coprire — quasi interamente — il campo che noi riguardiamo ancora oggi appartenere alle matematiche elementari: al quale aggiungiamo tuttavia gli sviluppi formali dell' algebra. Infatti gli *Elementi* (στοιχεῖα) sono divisi in tredici *libri* (1). I primi sei sono dedicati alla geometria piana e precisamente comprendono:

1) relazioni d'eguaglianza e diseguaglianza dei triangoli, parallele e somma degli angoli d'un poligono, eguaglianza di superficie dei parallelogrammi o triangoli d'ugual base e teorema di PITAGORA;

2) algebra geometrica, cioè relazioni d' eguaglianza fra le superficie di rettangoli, che contengono — sotto forma geometrica — la maggior parte della teoria delle equazioni di 2° grado (completata nel libro 6, prop. 28, 29 (2);

3) teoria del cerchio, intersezioni e contatti, angoli iscritti ecc.;

(1) Cfr. EUCLIDIS, *Opera Omnia*, edizione critica di HEIBERG e MENGE, in 5 volumi. Lipsia, 1883-1888.

(2) Cfr. H. G. ZEUTHEN, *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et dans le moyen âge*, trad. fr., 1902. — E. ARTOM, *Le equazioni di secondo grado presso i Greci*. « Periodico di Matematiche », n. 4, 1922.

Digitized by Google

4) costruzione dei poligoni regolari iscritti e circoscritti nel cerchio : triangolo, quadrato, pentagono, esagono e pentadecagono;

5) teoria generale delle grandezze e dei loro rapporti cioè, sotto forma geometrica, numeri incommensurabili ;

6) proporzioni geometriche, triangoli simili ecc.

I tre libri seguenti, 7, 8 e 9 sono invece dedicati all'aritmetica : proporzioni fra numeri interi, massimo comun divisore, decomposizione dei numeri in fattori primi ecc.

Il libro 10 contiene — sotto forma geometrica — una elaborata classificazione degli incommensurabili, resultanti da radicali quadratici sovrapposti.

I libri 11, 12, offrono i principî della stereometria, e in ispecie le relazioni di volume fra prismi e piramidi, cilindri e coni, nonchè la proporzionalità della sfera al cubo del diametro. Ed infine il libro 13 porge la costruzione dei cinque poliedri convessi regolari.

§ 2. Le origini della geometria greca : fonti per la ricostruzione storica. — L'opera, di cui abbiamo brevemente riassunto il contenuto, non può ritenersi costruzione originale d' EUCLIDE, ma appare riduzione in un trattato organico di ciò che il genio greco ha costruito nei tre secoli precedenti. Anche se mancassero in proposito testimonianze storiche precise, ciò dovrebbe ammettersi da chiunque — esaminando gli *Elementi* euclidei — si renda conto della magnifica perfezione dell'ordinamento deduttivo, che conferisce a questo trattato il suo carattere classico, e della finezza della critica che traspare in ogni sua parte. Ma più direttamente ciò si desume anche dalle informazioni che possediamo intorno allo sviluppo storico della geometria greca, che resultano dalle testimonianze di PLATONE (1) e d'ARISTOTELE (2), da alcuni frammenti come quello sulle lunule di IPPOCRATE di Chio (circa 450 a. C.) tramandatoci da SIMPLICIO, da qualche riferimento di ARCHIMEDE (287?–212 a. C.), e specialmente da autori greci di un'epoca posteriore, come PROCLO (412-485 d. C.) e PAPPO (3) che hanno potuto raccogliere la tradizione e avere notizia di testi, oggi perduti. Una particolare menzione merita il commento di PROCLO

(1) PLATONE d'Atene (429-348 a. C.).

(2) ARISTOTELE di Stagira (384-322 a. C.).

(3) PAPPO d' Alessandria fiorì al tempo di TEODOSIO alla fine del IV secolo d. C. ovvero — secondo altri — circa un secolo prima, sotto l'impero di DIOCLEZIANO.

Digitized by Google

al primo libro d' EUCLIDE (1), che reca diverse notizie sull'origine dei teoremi ed anche un breve disegno storico sui progressi della geometria.

Tutti questi documenti sono stati oggetto di uno studio accurato per parte di critici competenti, che ne hanno tratto una ricostruzione dello sviluppo storico della scienza nelle sue grandi linee (2). Grazie a tali lavori noi possediamo oggi una conoscenza discreta dell'ordine delle scoperte, delle epoche e dei nomi a cui si legano i principali acquisti, e cominciamo anche a renderci conto del vasto lavoro di « critica dei principî » che ha preceduto l'opera euclidea : la quale, per ciò appunto, ci appare tanto più vicina ai trattati moderni, esprimenti le esigenze logiche raffinate del nostro pensiero.

Ma andando oltre queste notizie, è specialmente importante per il matematico, non meno che per il filosofo, comprendere la genesi e lo sviluppo delle idee, che vuol dire costruire — nel suo più alto significato — la storia della scienza. E questa storia, toccando insieme alle origini della geometria e dell'analisi infinitesimale, nonchè della logica e della metafisica, dipende in gran parte da un'interpretazione delle fonti che solleva dubbi e dispareri, cui non è dato rispondere al lume della pura erudizione filologica senza una veduta filosofica. Dalla quale invero non può farsi indipendente neppure l'accertamento di quelli che, nella storia scientifica, voglionsi riguardare come « fatti », dove pure si tratta di conferire ai dati il loro proprio significato e di supplire talvolta alle fonti parziali o manchevoli, con ipotesi probabili.

Spieghiamo il nostro pensiero : a quel modo che la fisica non

(1) *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarium*, ed. FRIEDLEIN, Lipsia, 1873. — Sono anche da notare gli *Scholii* anonimi riprodotti nell'edizione critica dell' EUCLIDE sopra citata.

(2) C. A. BRETSCHNEIDER, *Die Geometrie und die Geometer von Euklides*, Lipsia, 1870; G. J. ALLMANN, *Greek Geometry from Thales to Euclid*, Dublino, 1889; P. TANNERY, *La géométrie grecque...*, Partie I, Parigi, 1887; *Pour l'histoire de la science hellène*, Parigi, 1887; H. G. ZEUTHEN, *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le Moyen Age* (ed. danese 1893), trad. fr. di MASCART, Parigi, 1902; M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, vol. I, 3ª ed., Lipsia, 1907; G. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia* (1ª ed. « Memorie dell'Accademia di Modena », 1893-1902), 2ª ed. Milano, Hoepli, 1914; TH. HEATH, *A History of Greek Mathematics*, Oxford, 1921; J. L. HEIBERG, *Naturwissenschaften, Mathematik und Medizin*, 2ª ed., Lipsia, 1920; trad. ingl., Oxford, 1922.

Digitized by Google

è copia della natura esteriore, ma rappresentazione di essa traverso concetti elaborati dalla nostra mente, allo stesso modo anche la storia del sapere non è semplice riproduzione di una realtà obiettiva (che si ridurrebbe positivamente alla collazione dei testi e delle testimonianze superstiti!), bensì elaborazione e ricostruzione dei dati, secondo un ordine intelligibile del progresso, che è posto dallo storico.

Ed è essenziale notare che quest'ordine costruttivo è altra cosa dall'ordine logico delle deduzioni, quale si ravvisa in una sistemazione organica della materia, per esempio nell'opera d' EUCLIDE. Qui infatti appariscono ai primi posti teoremi — come quelli sull'eguaglianza dei triangoli — che non possono appartenere ad un periodo primitivo dello sviluppo geometrico perchè non hanno significato di per se stessi, ricevendolo soltanto come principî od anelli di una catena che fa capo a proprietà geometriche veramente espressive: tali la somma degli angoli del triangolo e la relazione (pitagorica) fra i quadrati dei lati del triangolo rettangolo, i due fuochi cui tende l'ordinamento del primo libro euclideo.

§ 3. Apporti della cultura egiziana ed orientale. — La prima questione, in qualche modo pregiudiziale, per l'intelligenza dello sviluppo scientifico presso i Greci, consiste nel misurare l'apporto recato alla Grecia da altre civiltà. A tale riguardo è istruttiva la circostanza che la scienza o filosofia della natura dei Greci abbia avuto inizio nelle colonie ioniche dell'Asia Minore, che per la loro situazione geografica dovevano più facilmente comunicare coi paesi vicini, in cui aveva sede una più antica cultura, specie cogli Egiziani e coi Babilonesi. E la tradizione ricollega appunto le origini delle Matematiche nel mondo greco, agli insegnamenti ricevuti da codesti paesi.

ERODOTO (1) (scrittore della seconda metà del secolo V a. C.) racconta che Sesostri (cioè Ramsete II, circa 1300 anni a. C.) distribuì le terre d' Egitto in tanti pezzi rettangolari, su cui impose un annuo tributo; ma l'inondazione del Nilo avendo coperto in parte codesti terreni, fu necessario procedere ad una riduzione delle imposte, mediante misura delle aree: di qui — egli dice — sembra avere avuto origine la Geometria, che passò poi in Grecia.

(1) II, 109.

Digitized by Google

A questo racconto si riferisce forse (1) — direttamente o indirettamente — PROCLO, nel *Commento all'Euclide*, ove attesta (2) che, secondo la tradizione, « gli Egiziani furono i primi inventori della Geometria, e che questa nacque dalla misura dei campi, la quale dovevasi periodicamente rinnovare a causa delle inondazioni del Nilo, cancellanti i confini delle proprietà.... ». « TALETE (3) per primo — aggiunge PROCLO — avendo visitato l' Egitto, trasportò la dottrina geometrica da codesto paese in Grecia; egli medesimo fece varie scoperte ed aprì la via a molte altre, con i suoi metodi aventi ora un carattere più generale (o scientifico) ora un carattere applicativo ».

La perizia degli Egiziani nella pratica geometrica resulta anche indirettamente dalle parole (se pure non sicuramente autentiche) che da CLEMENTE (4) sono attribuite a DEMOCRITO (5), cioè che egli non aveva trovato chi lo superasse nel costruire linee nelle figure e dimostrarne le proprietà, « nemmeno fra i cosiddetti *arpedonapti* (tenditori di corde = geometri catastali) dell' Egitto ».

Anche alla derivazione di dottrine matematiche da paesi orientali dell'Asia, si riferiscono alcune testimonianze di autori greci. PROCLO (nello stesso brano sopra citato) dice che « presso i Fenici, a cagione degli scambi e delle operazioni commerciali a cui si dedicavano, sorse la precisa conoscenza dei numeri », e GIAMBLICO (6) menziona una speciale proporzione:

$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b;$$

che PITAGORA avrebbe appreso dai Babilonesi.

D'altra parte la predizione che TALETE ebbe a fare dell'eclisse solare del 28 maggio 585 a. C., non si può spiegare se non in base alle secolari osservazioni babilonesi (7), da cui resulta un certo periodo di ricorrenza delle eclissi (il *saros caldaico* di 423 lunazioni); sia che la notizia sia pervenuta a TALETE direttamente dai Babilonesi, o indirettamente dagli Egiziani.

(1) Cfr. HEATH, op. cit., vol. I, pag. 121.
(2) Pag. 65.
(3) TALETE di Mileto (circa 600 a. C.).
(4) *Strom.*, I, 15, 69 (DIELS, *Vorsokratiker*, II[3]).
(5) *Democrito* d'Abdera (circa 460-360 a. C.).
(6) In *Nicomachum*, pagg. 18-19.
(7) Cfr. l'art. di G. SCHIAPARELLI, in « Scientia », nn. VI, VII (1908).

Digitized by Google

Ma queste frammentarie indicazioni riceverebbero maggior lume da un esame approfondito di tutti i rapporti culturali intercedenti fra la civiltà greca e l'orientale, in ispecie dalla critica comparativa delle idee religiose. È un fatto degno di rilievo che la credenza nella «palingenesi», o trasmigrazione delle anime, si veda ad un tempo nascere e diffondersi in India ed in Grecia, presso gli Orfici e Pitagorici matematizzanti. E la coincidenza acquista particolare importanza per la storia della geometria, grazie alla recente scoperta di un lavoro di APASTAMBA-ŚULBA-SUTRA (1), che appartiene verosimilmente al V secolo a. C., ma la cui materia sembra risalire ad un'antichità assai più remota: dal quale resulta che gl' Indiani hanno conosciuto, prima dei Greci, diversi casi particolari del teorema cosiddetto di PITAGORA (2) (EUCLIDE, I, 47) — cioè non soltanto i casi 3, 4, 5 (di cui si trova pure notizia presso i Cinesi), sì anche i casi 5, 12, 13 e 15, 36, 39 — e che hanno acquistato in tal guisa una conoscenza induttiva del teorema generale, che APASTAMBA considera come una relazione del rettangolo alla sua diagonale.

In seguito a questa scoperta è difficile sfuggire all'impressione che un'influenza orientale si sia esercitata sulle origini della geometria greca e segnatamente sopra la scuola pitagorica. Ma diversi motivi inducono a ritenere che le dottrine geometriche, qualunque grado di sviluppo abbiano potuto ricevere nel mondo orientale ed egiziano, rivestissero un carattere pratico, come arte di misura e di costruzione, e soltanto presso i Greci — e nella scuola pitagorica — abbiano assunto il carattere propriamente scientifico e razionale, così tipicamente rappresentato dall'esposizione dell' EUCLIDE. Questa veduta, cui sembra suffragare una testimonianza generica di PLATONE (3), è conforme al riferimento di

(1) Trad. di BUERK, in «Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft», t. 56 (1901).

(2) Nato a Samo intorno al 572 a. C., o poco prima, PITAGORA, dopo lunghi viaggi disceso a Crotone fondò ivi quella setta di carattere religioso ed aristocratico che prese il nome di *scuola italica*. Questa associazione, dopo avere esercitato una larga influenza sulla vita politica delle città della Magna Grecia, andò incontro ad una violenta reazione, sicchè si dice che il locale delle sue riunioni a Crotone sia stato incendiato attorno all'anno 500, e nel disastro molti membri della scuola — e forse anche il maestro — abbiano trovato la morte (altri fa vivere PITAGORA fino a tardissima età, segnando come estremo della sua vita il 482).

(3) *Rep.*, 436, ove i Greci, a differenza dei Fenici e degli Egiziani, vengono dipinti come amanti del sapere piuttosto che della ricchezza.

Digitized by Google

PROCLO nel citato sunto storico. Quivi, dopo la menzione che riportammo di TALETE e l'accenno ad un ignoto MAMERCO, l'A. prosegue:

« Dopo di questi, Pitagora trasformò lo studio della geometria in un insegnamento liberale, esaminando i principî generali da cui resulta la dimostrazione dei teoremi in una maniera immateriale e intellettuale: fu lui a scoprire la teoria delle grandezze incommensurabili e la costruzione delle figure cosmiche (poliedri regolari) ».

Ora la costituzione della geometria come scienza razionale importa di superare alcune peculiari difficoltà inerenti ai concetti fondamentali, di cui per la prima volta vuolsi guadagnare una visione astratta; ed il nostro problema sarà appunto d'intendere questo progresso critico delle idee, che ha un'importanza decisiva per la storia del pensiero e della filosofia dell'antica Grecia.

§ 4. Ordine delle principali scoperte. — Per chiarezza d'esposizione offriremo anzitutto al lettore una notizia riassuntiva dell'ordine delle principali scoperte geometriche, secondo le indicazioni che traggonsi in primo luogo dal *Commento all'Euclide* di PROCLO, debitamente criticate e confrontate colle testimonianze di altri scrittori (1).

A TALETE di Mileto sono attribuite le seguenti scoperte:

1) L'osservazione che il cerchio viene diviso in parti uguali dai suoi diametri (PROCLO, pag. 157, 10).

2) La proprietà (EUCLIDE, I, 5) che gli angoli alla base del triangolo isoscele sono uguali, o *simili*, secondo la parola che sembra designare il concetto arcaico dell' « angolo » come limitato (PROCLO, pagg. 250, 20 e 251, 21).

3) L'uguaglianza degli angoli opposti al vertice formati da due rette che s'incontrano (EUCL., I, 15): questa proprietà sarebbe stata osservata, ma non dimostrata, da TALETE, secondo la testimonianza di EUDEMO (2) in PROCLO (pag. 229, 1-5).

4) Il teorema sull'uguaglianza dei triangoli che hanno uguali un lato e due angoli (EUCL., I, 26) è pure attribuito a TALETE da EUDEMO (PROCLO, pag. 320, 14-18), argomentando da ciò che la sua conoscenza è implicita nella determinazione della distanza d'una nave, di cui appunto TALETE aveva notizia. Ma TANNERY e ZEUTHEN giustamente osservano che il citato teorema non ha

(1) Cfr. HEATH, op. cit.
(2) EUDEMO da Rodi, discepolo d'ARISTOTELE.

Digitized by Google

un senso di per sè, fuori di un ordine deduttivo d'esposizione della geometria, e però ritengono dalla indicazione d'EUDEMO soltanto questo, che TALETE aveva appreso (probabilmente dagli Egiziani, ad eseguire alcune operazioni elementari di geometria pratica.

5) Aggiungeremo che, secondo un'indicazione di PAMFILO (vissuto sotto il regno di Nerone 54-68 dell'e. v.) si sarebbe tratti ad attribuire a TALETE anche la proprietà che l'angolo iscritto nel semicerchio è retto; ma secondo APOLLODORO (in DIOGENE LAERZIO, I, 24, 25), questa scoperta apparterrebbe a PITAGORA.

Abbiam detto che il sunto storico di PROCLO, dopo avere menzionato TALETE ed un MAMERCO, di cui non si ha d'altronde ulteriore notizia, viene a parlare dello sviluppo che la geometria ricevette per opera di PITAGORA.

Ora a PITAGORA e — in largo senso — alla sua scuola, sono attribuite le seguenti scoperte geometriche:

1) Il teorema che la somma degli angoli del triangolo è uguale a due retti (EUCL., I, 32): EUDEMO (in PROCLO, pag. 397, 2) dice che la scoperta di questo teorema generale appartiene ai Pitagorici; secondo GEMINO (1) parrebbe che alcuni casi particolari siano stati conosciuti a più antichi geometri. Al teorema precedente si lega poi la divisione del piano in poligoni regolari: triangoli, quadrati o esagoni, di cui rispettivamente 6 o 4 o 3 hanno un vertice a comune.

2) La relazione fra i quadrati dei lati del triangolo rettangolo (EUCL., I, 47) — comunemente designata col nome di «teorema di PITAGORA» — viene dalle concordi testimonianze di PLUTARCO, ATENEO e DIOGENE LAERZIO attribuita a PITAGORA. PROCLO nel sunto storico del suo *Commento*, si limita a dire che «fra gli scrittori d'antiche storie vi sono alcuni che riferiscono questo teorema a PITAGORA, raccontando ch'egli avrebbe sacrificato un bove in onore della scoperta».

3) L'*applicazione delle aree*, parabolica o iperbolica (in eccesso) o ellittica (in difetto), — cioè la costruzione d'un rettangolo (o d'un parallelogramma) di data base, che sia equivalente o prevalente o suvvalente, di un dato quadrato, ad un'area data —, risalirebbe pure, secondo EUDEMO in PROCLO (2), ai Pitagorici.

(1) Nel *Commento alle «Coniche» di Apollonio* di EUTOCIO (Ed. HEIBERG, II, pag. 170).

(2) Pag. 419, 15 - 420, 12. Di qui traggono origine i nomi delle tre specie di coniche, introdotti da APOLLONIO di Perge.

Digitized by Google

Questi resultati — che trovano posto in EUCLIDE: I, 44, II, 5 e 6, VI, 28 e 29 — costituiscono secondo ZEUTHEN, la cosiddetta *algebra geometrica*, che importa sostanzialmente la risoluzione delle equazioni di 2° grado (1).

4) La scoperta degli incommensurabili è attribuita a PITAGORA da PROCLO, nel passo del sunto storico riportato di sopra. Ma uno scolio al libro X dell'EUCLIDE (2) riferisce la scoperta ai Pitagorici, e racconta che colui che la rese pubblica perì in un naufragio. Questa leggenda, che prende anche altre forme, sembra alludere ad uno scisma avvenuto nell'ordine pitagorico, per cui gli *acusmatici* si separarono dai *matematici*, ad opera d'IPPASO di Metaponto. Ma vi si può anche scorgere la tradizione di un geloso segreto con cui si voleva sottrarre alla critica dei profani un resultato tardivo e, come vedremo, imbarazzante per l'insieme delle dottrine pitagoriche. È difficile tuttavia di precisare un poco l'epoca della scoperta: un limite superiore è fissato dalle notizie che PLATONE (3) ci porge sull'irrazionalità di $\sqrt{3}, \sqrt{5}...., \sqrt{17}$ riconosciuta da TEODORO di Cirene (nella seconda metà del V secolo a. C.), nonchè dal titolo di un'opera perduta di DEMOCRITO d'Abdera (460-360).

Pure l'irrazionalità di $\sqrt{2}$, cioè l'incommensurabilità della diagonale col lato del quadrato, si lascia dedurre assai spontaneamente dal teorema di PITAGORA. Le considerazioni aritmetiche di tipo pitagorico che valgono all'uopo, sono accennate da ARISTOTELE (*Analytica priora*, I, 23) e spiegate in uno scolio anonimo all'EUCLIDE (4): supposto $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ è lecito ammettere che uno dei due interi m e n, p. es. n, sia dispari; ma allora si ha:

$$m^2 = 2n^2, \qquad m = 2m_1, \qquad n^2 = 2m_1^2$$

e quindi si deduce che n è pari, contro l'ipotesi.

5) La costruzione delle figure cosmiche (poliedri regolari), che — come abbiam visto — è attribuita da PROCLO a PITAGORA, non deve forse interpretarsi nel senso più elevatamente scientifico. Poichè gli archeologi hanno trovato modelli di dodecaedri re-

(1) Cfr. E. ARTOM, *Le equazioni di secondo grado presso i Greci*, in « Periodico di Matematiche », II, 4 (1922).

(2) Ed. HEIBERG, V, pagg. 415, 417.

(3) TEETETO, 147 d.

(4) Ad. libr. X, prop. 115 (Ed. HEIBERG, t. III, pag. 408).

Digitized by Google

golari di origine etrusca (1) e celtica (2), risalenti probabilmente alla prima metà del millennio a. C., è assai verosimile, che tali oggetti siano stati conosciuti ed abbiano attratto l'attenzione di PITAGORA: ciò non significa che egli sia riuscito a darne la costruzione precisa, che si trova in EUCLIDE, XIII, 17. Ed invero lo scolio 1 all'EUCLIDE, XIII (3) dice che: « le cinque figure dette platoniche, non appartengono di fatto a PLATONE, ma tre di esse — cioè il cubo, il tetraedro e il dodecaedro — sono dovute ai Pitagorici, ed invece l'ottaedro e l'icosaedro a TEETETO ».

Da questo breve riassunto si può arguire quale fosse il grado di sviluppo raggiunto dalla scienza geometrica, intorno alla metà del V secolo a. C., cioè all'epoca in cui — secondo il sunto storico di PROCLO — si occuparono di questioni geometriche ANASSAGORA di Clazomene (500-428 a. C.) e ENOPIDE di Chio, e dopo di loro « acquistarono rinomanza nella geometria, IPPOCRATE di Chio, che scoprì la quadratura delle lunule, e TEODORO da Cirene », mentre « IPPOCRATE compose anche per la prima volta in trattato gli *Elementi della scienza* ».

Ne inferiamo che, almeno per quanto concerne la planimetria, la maggior parte della materia contenuta nell'EUCLIDE (I-VI) fu acquisita rapidamente dai geometri greci, in un primo periodo di sviluppo della geometria che sembra occupare meno di un secolo. Più precisamente riscontriamo nei resultati posseduti dalla scuola pitagorica, le materie contenute nei libri I, II, VI e probabilmente IV, mentre la dottrina generale delle proporzioni (o dei rapporti incommensurabili) del libro V, sappiamo da uno scoliasta appartenere ad EUDOSSO di Cnido (408-353 a. C.). Per quel che riguarda il libro III (gli angoli nel cerchio ecc.), i nostri riferimenti non ci danno altra notizia che l'accenno concernente l'iscrizione dell'angolo retto nel semicerchio: scoperta attribuita a TALETE e a PITAGORA, che difficilmente si può credere rimanesse isolata, tenuto conto dell'interesse estetico che i Pitagorici manifestano per le figure rotonde.

Ora le notizie sopra riferite si possono confrontare con un documento di eccezionale importanza, conservatoci da SIMPLICIO nel

(1) LINDEMANN, « Rendic. Accad. di Monaco » (1897), t. 26, pag. 625.

(2) HUGO, « Comptes rendus » (1873, '75, '79), t. 63, pag. 420; 67, pag. 433; 81, pag. 332.

(3) Ed. HEIBERG, t. V, pag. 654.

Digitized by Google

Commento alla Fisica di ARISTOTELE (1). Trattasi del frammento di uno scritto sulle lunule d' IPPOCRATE di Chio (2) che, potendosi presumere composto intorno al 450 a. C., ci lascia scorgere l'altezza raggiunta a quell'epoca dal ragionamento geometrico e conferma d'altronde il possesso delle sopra menzionate teorie. Anzi questo lavoro attesta nell'Autore anche la conoscenza delle proprietà del cerchio (EUCL., III), ch'ei dovrebbe dunque avere ritrovato da sè (come opina il LORIA) se non si vuole ammettere che l' argomento sia stato precedentemente studiato.

Di ciò che il frammento d' IPPOCRATE può insegnarci in ordine a questioni di aree, di natura infinitesimale, e in genere su ciò che i Greci giunsero a vedere in questo campo, diremo espressamente più avanti.

§ 5. I concetti fondamentali della geometria pitagorica. — Resulta dal precedente esame che, ad approfondire la storia dei concetti fondamentali della geometria, conviene fermare l'attenzione su quel momento decisivo del suo sviluppo in cui la scienza — superando i bisogni della pratica — acquista un significato razionale, traverso l'opera della scuola pitagorica.

Questo sviluppo appare strettamente connesso colle speculazioni cosmologiche e filosofiche sulla natura, iniziate fin dai più antichi Milesî. Non tanto perchè tali speculazioni abbian dato motivo a porre e risolvere problemi matematici, siccome oggi accade nella fisica teorica, quanto perchè la riflessione dei geometri primitivi sembra esercitarsi sopra lo spazio cosmico, riguardato nella sua materiale concretezza, anzichè sollevarsi all'idea d'uno spazio astratto, puramente matematico.

Di siffatta maniera di pensare, che è per noi un po' difficile a comprendere, ma che — accettata — è atta a renderci chiara l'evoluzione dei concetti, possiamo recare precise testimonianze

(1) Ed. DIELS, Berlino, 1882.

(2) Fino dal 1870 il BRETSCHNEIDER attrasse su questo documento l'attenzione dei geometri. Più tardi gli studi critico-filologici dell'ALLMANN (1881) e dell' USENER collaboratore del DIELS (1882), e quindi del TANNERY (1883) e dell' HEIBERG (1884), valsero a sceverare in modo abbastanza soddisfacente ciò che del testo di SIMPLICIO risale propriamente a IPPOCRATE (o almeno a EUDEMO che direttamente vi attinse). Questi studi e le critiche più recenti, sono riassunti nel « Bericht des Simplicius über die Quadraturen.... », di F. RUDIO, pubblicato a Lipsia nel 1907.

Digitized by Google

storiche. ARISTOTELE allude certo ai Pitagorici in *Met.*, VI, 11 (1), ove dice che alcuni definivano il cerchio e il triangolo riguardandoli assolutamente, come chi nella definizione dell'uomo ne consideri la carne e l'ossa, e perciò — non come divisioni d'una linea nella continuità della superficie — ma come oggetti concreti, tenendo conto del bronzo o della pietra di cui son fatti.

Tuttavia tale affermazione non si deve prendere troppo alla lettera, poichè guardando al profondo significato della filosofia pitagorica (che maturerà in senso positivo coll'atomistica) vi si scorge la tendenza a ridurre le differenze qualitative della materia sensibile al numero e alla disposizione di elementi identici, da cui tutti i corpi si suppongono costituiti (2).

Appunto questa dottrina monadica della materia estesa, che è ad un tempo dottrina matematica e metamatematica, sembra continuare le speculazioni sulla *natura* delle cose dei filosofi milesî.

Già TALETE supponeva che l'acqua (che si vede ora zampillare liquida dalla roccia, ora alimentare i semi e crescere le piante) costituisse una natura primitiva, cioè una forma cosmica della materia, che si ritroverebbe in qualche modo invariabile traverso i cambiamenti di stato della materia sensibile. Più tardi ANASSIMENE cercherà il principio cosmologico nell'aria, ed ERACLITO (d'Efeso) nel fuoco. Frattanto però il secondo dei Milesî, ANASSIMANDRO, aveva enunciato che la natura delle cose è τὸ ἄπειρον, cioè «l'infinito»: e probabilmente egli ha voluto indicare in tal guisa soltanto l'attributo della materia cosmica di essere illimitatamente diffusibile, identificandosi collo spazio.

Ora, proprio accanto alle ricerche sulla natura dei filosofi ionici, ARISTOTELE menziona la dottrina pitagorica, in questi termini.

Met., I, 5 (3): «I cosiddetti Pitagorici, avendo cominciato ad occuparsi di matematiche, le fecero grandemente progredite, e studiando pensarono i principî di queste essere i principî di tutte le cose esistenti. E poichè i primi che qui s'incontrano sono, naturalmente, i numeri, sembrò loro di ravvisare in questi, molte più analogie con ciò che esiste o avviene nel mondo, di quante se ne possono trovare nel fuoco, nella terra e nell'acqua....

(1) *Z* 11, 1036 b, 8.
(2) Cfr. p. es. ARISTOTELE, *de caelo*, *Γ* 1, 300 a, 15.
(3) A. 5, 985 b, 23.

Digitized by Google

« Avendo poi riconosciuto che le proprietà e le relazioni delle armonie musicali corrispondevano a rapporti numerici, e che anche in altri fenomeni naturali si riscontravano analoghe corrispondenze coi numeri, furono tanto più indotti ad ammettere che i numeri costituissero gli elementi di tutte le cose.... ».

FILOLAO, che viveva a Tebe circa il 400 a. C., ed è il primo dei Pitagorici da cui possiamo raccogliere qualche scritto, esprimeva le medesime dottrine dicendo: « tutte le cose conosciute posseggono un numero e nulla possiamo conoscere o comprendere senza di questo » (1). Ma il passo sopra citato, ed altri passi aristotelici (p. es. *De coelo*, III, 1 (2) ove è detto che i Pitagorici componevano il cielo coi numeri) suggerisce una formula più antica e paradossale, cioè che: *le cose sono numeri*. La quale formula assumerà un significato comprensibile per chi ritenga che il *numero pitagorico* — almeno nei pensatori primitivi della scuola — non sia già il numero astratto della nostra aritmetica, bensì il *numero concreto*, designando una *collezione* d'oggetti che comunemente dovevano venire pensati come *punti*, presi in una certa disposizione e costituenti una certa figura (3). D'altronde della concretezza del numero pitagorico si hanno prove storiche, dirette e indirette. La più chiara illustrazione ne è pôrta dalla teoria dei numeri figurati: numeri triangolari, rettangolari, piramidali ecc., che formarono particolare oggetto di studio nella scuola. A proposito dei quali è interessante ricordare che la considerazione loro — implicante la veduta d'un rapporto fra geometria ed aritmetica — sembra avere occupato DES CARTES nell'inverno 1619-20, precorrente all'elaborazione della geometria analitica (4).

Ciò che a noi importa soprattutto fermare è che l'elemento « punto » della primitiva teoria pitagorica, non era il punto senza dimensioni della nostra geometria euclidea, ma il *punto esteso*, conforme all'intuizione empirica del granellino di sabbia, che

(1) In DIELS, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, I (Berlino, 1912), fr. 4.

(2) Γ 1, 300 a, 14.

(3) Ipotesi affacciata da P. TANNERY, e svolta da G. MILHAUD, *Les philosophes geomètres de la Grèce* (pag. 107), Parigi, 1900. Cfr. anche L. BRUNSVICG, *Les étapes de la philosophie mathématique* (Parigi, 1912), in ispecie a pag. 33 ove si affaccia l'idea ingegnosa che l'accennato concetto del numero sia stato suggerito dall'osservazione delle costellazioni rappresentate nella carta celeste.

(4) Cfr. MILHAUD, in « Scientia », I, II, 1918, pag. 87.

Digitized by Google

quei filosofi designavano come *monade* o unità avente posizione. La tesi che le cose sono numeri implica precisamente questa teoria monadica della materia, della quale si può scorgere forse il legame che la riattacca alla dottrina della materia infinita di ANASSIMANDRO. Mentre ANASSIMENE derivava il liquido e il solido per condensazione, e il fuoco per rarefazione, dall' « aria infinita », (*τὸ ἄπειρον ἀήρ*), poteva similmente PITAGORA far nascere la struttura corpuscolare della materia da una condensazione dell'elemento primitivo (infinito) attorno a centri monadici, per modo che i punti venissero delimitati da un circostante vuoto o più propriamente da un mezzo etereo rarefatto, della natura del fuoco: il che si accorda con talune descrizioni che ARISTOTELE ci porge delle vedute pitagoriche (1).

Ora la teoria monadica della materia, in quanto appare anche teoria dello spazio (pensato — come si è detto — in concreto) offre il naturale fondamento di una dottrina delle proporzioni o della misura: perchè due linee, essendo formate ciascuna da un certo numero di punti, hanno un rapporto definito dal rapporto di tali numeri ecc. Si comprende dunque come i Pitagorici poterono riuscire ad una trattazione aritmetica della geometria, sebbene basata sul presupposto erroneo che tutte le grandezze siano commensurabili. Soltanto la scoperta degli incommensurabili doveva dar luogo ad una revisione critica dei concetti fondamentali.

Così la prima costruzione della geometria pitagorica, non rappresenta che un tentativo imperfetto di conferire alla scienza un assetto razionale. Tuttavia anche il solo pensiero d'un ordine deduttivo in cui le proprietà geometriche vengano dimostrate, anzichè semplicemente osservate, costituisce già un avvenimento memorabile nella storia.

ZEUTHEN (2) ritiene che il motivo a tale progresso venga pôrto dal bisogno di offrire una dimostrazione generale del cosiddetto teorema di PITAGORA, relativo ai quadrati dei lati del triangolo rettangolo. Si è già detto che casi particolari di questo teorema erano noti in Oriente fin dall'antichità più remota. ZEUTHEN crede che una dimostrazione induttiva, nel supposto che i lati

(1) Cfr. ARISTOTELE, *Met.*, A 5, 986 a, 15; 987 a, 9; N. 3, 1091 a, 13; *Phys.*, Δ 6, 213 b, 22.

(2) *Théorème de Pythagore: origine de la géométrie scientifique.* II Congresso int. di Filosofia, Ginevra, 1904.

Digitized by Google

del triangolo siano espressi da numeri interi, abbia potuto esser guadagnata da PITAGORA mercè l'osservazione d'una figura in cui il quadrato appare decomposto in quadrati e rettangoli, come si vede nel secondo libro dell' EUCLIDE. E soltanto più tardi nella scuola pitagorica, si sarebbe giunti al possesso della dimostrazione generale, basata sulle proporzioni. Per quanto anche questa dimostrazione non sia affatto rigorosa, finchè non si sia imparato a trattare (con EUDOSSO) i rapporti incommensurabili, pure essa dovette fornire occasione allo sviluppo di un primo ordine dimostrativo della scienza geometrica. Il quale fu poi mutato da EUCLIDE, che — avendo rimandato fino al quinto libro la teoria delle proporzioni, resa difficile dall'esigenza del rigore eudossiano — ebbe a costruire *ex-novo* la dimostrazione del teorema di PITAGORA esposta nel primo libro degli *Elementi*, siccome ne reca testimonianza il *Commento* di PROCLO (1).

§ 6. **La critica eleatica.** — La nostra attenzione si volge ora al momento in cui la geometria pitagorica, edificata — come si è ammesso — sopra il concetto del punto esteso, dovette andare incontro ad una crisi rinnovatrice. Forse questa crisi potè essere determinata dalla scoperta dell'incommensurabilità fra l'ipotenusa e il lato del triangolo rettangolo isoscele, che vedemmo già esser fatta nella stessa scuola pitagorica: e ad essa, e allo stato d'animo che l'accompagna, può riferirsi la leggenda di IPPASO di Metaponto, espulso dai confratelli e punito dagli Dei per aver rivelato il segreto di codesta scoperta, o di altra simigliante.

Comunque, noi crediamo di poter cogliere lo sviluppo della crisi e l'acquisto del vero concetto razionale degli enti geometrici (punto senza dimensioni, superficie senza spessore ecc.) traverso la polemica della scuola d'Elea (PARMENIDE, ZENONE) per l' « unità » e la continuità dell' esistente, cioè della materia estesa e dello spazio, e contro la « pluralità » (che designerebbe la tesi pitagorica spiegata innanzi). E riteniamo che la stessa veduta metafisica degli Eleati — che sarà svolta poi, in senso formale, dai *Megarici* e da PLATONE, in antitesi col « divenire » eracliteo — sorga precisamente sopra il terreno di codesta critica dei concetti naturalistici e matematici pitagorici; onde infine si afferma — fuori dell'idea metafisica o metamatematica — la nozione degli enti

(1) Pag. 426, 6.

Digitized by Google

geometrici quali enti astratti, cioè matematici, nel senso che noi diamo a questa parola.

Non è qui il luogo per discutere, coll'ampiezza che sarebbe necessaria, la tesi sopra accennata, suffragandola coll'esame comparativo dei testi; e d'altronde lo abbiamo già fatto espressamente altrove e specie in un recente articolo del « Periodico di Matematiche », a cui rimandiamo lo studioso (1). Ci limiteremo perciò ad enunciare le conclusioni a cui siamo pervenuti, spingendo avanti le vedute affacciate primamente dal TANNERY.

Dunque, PARMENIDE d' Elea (2), in antitesi coi filosofi della più antica scuola pitagorica, riconosce la continuità dello spazio, e così libera la geometria dalle contraddizioni che incriscono al concetto delle superficie dotate di spessore, o del punto esteso. Il quale, costituendo un bastardo infinitesimo attuale, non può soddisfare a quei principî logici, che appunto il Nostro scopre e formula in tale occasione, come condizioni della pensabilità degli enti, ed anche — secondo il suo criterio razionalistico — della loro esistenza fuori di noi, nel mondo della natura.

Ma poichè la tesi parmenidea veniva oppugnata da avversari che male la comprendevano, ZENONE (3) levatosi in armi a difendere il maestro, volle far toccare con mano che, dalla tesi opposta della pluralità (le figure « somme di punti ») derivano conseguenze assai più ridicole e assurde, per chi sia capace di spingere abbastanza avanti la riflessione. E gli argomenti di ZENONE assumono forma matematica precisa, cioè quella forma che siamo soliti incontrare nelle cosiddette « antinomie dell' infinito ».

Specialmente interessante è la spiegazione che la nostra veduta offre dei celebri argomenti sul moto, da riguardare non più puri sofismi, bensì riduzioni all'assurdo della tesi pitagorica: siccome già fu riconosciuto dal TANNERY. Ricordiamo in breve i primi due argomenti (4).

(1) *La polemica eleatica per il concetto razionale degli enti geometrici.* « Periodico di Matematiche », n. 2, 1923.

(2) Nato intorno al 540 a. C., o — secondo altri — una trentina d'anni più tardi.

(3) Discepolo di PARMENIDE, di 25 anni più giovane.

(4) Il terzo argomento (della freccia) significa che il tempo non è « somma d'istanti ». Il quarto crediamo — a differenza del TANNERY — che voglia provare la relatività del movimento. Cfr. ENRIQUES, *La relatività del movimento nell'antica Grecia.* « Periodico di Matematiche », n. 2, 1921.

Digitized by Google

1) Un punto mobile non può passare da A in B senza passare prima per il punto medio, C, del segmento AB, e poi per il punto medio del segmento CB, e così via all'infinito.

2) Similmente Achille pie'-veloce non può raggiungere alla corsa la tartaruga, sol che le dia un certo vantaggio AB, poichè dovrà prima passare per il punto B, e frattanto la tartaruga avrà percorso un certo tratto BB' (sia pure, p. es., un decimo di AB); ed ancora prima, di raggiungere la tartaruga, Achille dovrà andare da B in B', mentre la tartaruga avrà percorso un nuovo tratto $B'B''$, e così via all'infinito.

A questi argomenti — che sono appunto i primi due argomenti di ZENONE — noi rispondiamo che lo spazio da percorrere è, nell'un caso come nell'altro, finito, sebbene decomposto in un numero infinito di parti. Invero il primo caso porge la decomposizione

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots \qquad (AB = 1),$$

mentre il secondo conduce a ricercare la somma della progressione geometrica

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots\ldots = 1 + \frac{1}{9} \qquad \left((AB) = 1,\ BB' = \frac{1}{10}\right).$$

Però, nell'ipotesi che ogni segmento sia sempre superiore ad un minimo e (dimensione del punto o intervallo fra due punti contigui), si deduce che una somma d'un numero infinito di segmenti è sempre infinita, sicchè le deduzioni di ZENONE provano rigorosamente l'assurdo di siffatta ipotesi.

Ma certo il pensiero greco non poteva fermarsi a questa conclusione negativa: o qualche avversario di ZENONE o magari ZENONE stesso, debbono essersi posto il problema di sommare la progressione geometrica, e il resultato era perfettamente raggiungibile da chi possedeva — nella teoria geometrica delle proporzioni — un equivalente delle nostre equazioni lineari, mercè cui si trova appunto l'incontro di Achille colla tartaruga. Perciò si deve ritenere (collo ZEUTHEN) che la *scoperta della somma della progressione geometrica* risalga appunto a quel periodo delle matematiche greche, in cui la critica eleatica s'imbatte, per la prima volta, colle difficoltà sollevate dall'infinito.

Digitized by Google

§ 7. **Origini dell'analisi infinitesimale: la quadratura del cerchio e Ippocrate di Chio.** — ZENONE d' Elea, o — con lui e, accanto a lui — chi ha trovato la somma della progressione geometrica, ha scoperto il mondo dell'infinito; chi altri camminerà più avanti su questa strada meravigliosa?

Ecco una storia la cui ricostruzione non potrebbe esser pagata a troppo caro prezzo, ma che disgraziatamente si avvolge, per una gran parte almeno, in una fitta tenebra. Quando la tenebra si dirada, troviamo ARCHIMEDE (1) occupato colle più vaste applicazioni dell'analisi infinitesimale ai problemi della geometria e della meccanica, e vediamo il genio di lui stretto dalla disciplina di un metodo, dovuto ad EUDOSSO di Cnido e gelosamente custodito nella scuola d'Alessandria.

Pure la stessa cura con cui codesto metodo elimina ogni procedimento infinito, sostituendolo con semplici diseguaglianze e riduzioni all'assurdo, testimonia di un rigore raffinato, quale noi stessi abbiamo imparato a praticare (con CAUCHY, WEIERSTRASS, DINI ecc.) nella recente sistemazione critica del moderno calcolo infinitesimale; e, come non si potrebbe concepire questa sistemazione critica senza una precedente fioritura più libera dei concetti infinitesimali, così siamo indotti a ritenere (collo ZEUTHEN) che anche la critica dei Greci — di cui troviamo il resultato nella teoria dei rapporti incommensurabili del 5° libro euclideo, o nelle dimostrazioni per assurdo di teoremi come quello sull'equivalenza delle piramidi (*Elementi*, libro XII, prop. 4) — sia stata preceduta da un più libero impiego di procedimenti suggeriti dalla considerazione dell'infinito: la quale ebbe ad esser ripresa più tardi da ARCHIMEDE, le cui ricerche precorrono, come diremo, al calcolo integrale moderno. Questa induzione viene confermata da uno scritto, recentemente scoperto, dello stesso ARCHIMEDE, e dalle — siano pure poche e frammentarie — notizie che qui giova raccogliere.

Anzitutto è naturale di rivolgersi al problema della quadratura del cerchio (2), la cui antichità è attestata da una costruzione pratica contenuta nel *Papyrus Rhind* dell'egiziano AHMES, che

(1) Nato a Siracusa probabilmente il 287 a. C., fu ucciso nel 212 da un soldato romano di Marcello, espugnatore della città, di cui egli aveva fatto una memorabile difesa.

(2) Cfr. RUDIO, *Archimedes, Huyghens, Lambert, Legendre*, Lipsia, 1892.

Digitized by Google

risale a due mila anni avanti l'èra volgare, e che porge un valore abbastanza approssimato del rapporto della circonferenza al diametro ($\pi = 3{,}16$). Certo il problema della quadratura del circolo deve essere stato tentato dai Greci fin dagli inizi della scienza matematica, e quindi nella scuoia pitagorica; ma su ciò non pare che si abbiano testlmonianze.

Invece in un frammento di IPPOCRATE di Chio, conservatoci da SIMPLICIO (1), si vede un tentativo d'ordine assai elevato per la risoluzione del famoso problema, e si scorge IPPOCRATE adoperare la proporzionalità dei cerchi ai quadrati dei diametri. IPPOCRATE, che già dicemmo essere ricordato da PROCLO (EUDEMO) come autore di *Elementi*, doveva possedere di questo teorema qualcosa di più che una semplice verifica empirica, cioè una dimostrazione, più o meno rigorosa, che forse aveva trovato egli stesso o che aveva preso a prestito da qualche predecessore. Ciò induce a supporre che all'epoca cui risale il frammento (circa la metà del V secolo a. C.) si dovesse già essere presentata ai geometri la considerazione dei poligoni iscritti, e probabilmente anche dei poligoni circoscritti al cerchio, quindi anche la serie o le serie infinite cui essi danno luogo. Qualcuno spinge più lontano l'ipotesi, fondandosi sopra un accenno alla dimostrazione della proporzionalità dei cerchi ai quadrati dei diametri, che è contenuto nella lettera d'ARCHIMEDE preludente al libro sulla quadratura della parabola. ARCHIMEDE dice che già, in occasione di quel teorema, i geometri precedenti si sono serviti del lemma che « se due spazi sono diseguali, la differenza tra di essi addizionata più volte a se stessa, può superare qualunque spazio finito ».

Questo lemma conduce ad un tipo particolare di dimostrazione per assurdo, cioè a quel *metodo*, cui già innanzi si è alluso, che dicesi di *esaustione*, e che in tutta la sua generalità fu praticato da EUDOSSO di Cnido (fondatore della scuola di Cizico verso il 368 a. C.); ma, secondo lo HANKEL e il LORIA, l'accenno d'ARCHIMEDE potrebbe riferirsi già ad IPPOCRATE, che così preluderebbe, in un caso particolare, al metodo d'esaustione.

Non c'è invero nulla di straordinario nella scoperta del lemma sopra accennato (che comunemente viene designato come « postulato d'ARCHIMEDE »), anzi il riconoscimento del fatto è implicito già negli argomenti di ZENONE; ma più difficile è ammettere che

(1) Già citato al § 4.

Digitized by Google

il metodo d'esaustione possa, fin da principio, prendere il posto di altri procedimenti diretti e men rigorosi, che si presentano più naturali. Perciò, in ogni caso, crediamo che il periodo costruttivo dell'analisi infinitesimale, dove ha posto la considerazione non dissimulata dell'infinito, debba prolungarsi in Grecia dopo la scuola di Chio, specialmente in DEMOCRITO d'Abdera (1).

§ 8. **Sviluppo dell'analisi infinitesimale da Democrito a Eudosso e Archimede.** — A vero dire i documenti su cui possiamo fondare un giudizio dell'opera matematica di DEMOCRITO, sono poca cosa; tuttavia non manca, come vedremo, qualche testimonianza precisa.

Anzitutto conviene esaminare i titoli delle opere perdute del grande filosofo, che si riferiscono alle matematiche. Secondo TRASILLO (2), questi titoli sono:

1) *Su una differenza d'opinione o sul contatto del cerchio e della sfera*; ovvero: *Sulla differenza del gnomone o sul contatto del cerchio e della sfera* (3);

2) *Sulla geometria*;

3) *Libri geometrici*;

4) *I numeri*;

5) Due libri *Sulle linee e sui solidi incommensurabili*.

Limito il catalogo alle opere strettamente matematiche, lasciando da parte quelle astronomiche, naturalistiche ecc., che salgono ad un centinaio, e contemplano tutti i rami dello scibile.

Il titolo del primo lavoro, secondo il modo dell'interpretazione, conduce a differenti ipotesi. Coloro che vi leggono la parola « gnomone », sono condotti (con ALLMANN) a supporre che contenesse questioni direttamente attinenti all'analisi infinitesimale. Quelli che leggono « opinione » possono scorgervi (con VOGT) una polemica contro la tesi che vedremo sostenuta da PROTAGORA, circa la natura del contatto.

La prima interpretazione è forse un po' speciosa, ma il criterio della ricostruzione di ALLMANN, che muove dalla visione d'un legame fra le vedute atomistiche (propugnate, come è noto, da

(1) Filosofo atomista, n. il 460, m. circa il 360 a. C.

(2) DIELS, B. 11, L. 11 p (II, 62).

(3) La diversità di traduzione dipende dall' incerta scrittura di una parola greca in cui taluno legge γνώμης (opinione), altri γνώμονος (del gnomone).

Digitized by Google

DEMOCRITO) e lo sviluppo dei concetti dell'analisi infinitesimale, mi sembra eccellente; e l'induzione che l' atomista DEMOCRITO si sia veramente occupato di tali concetti apparirà confermata, almeno in senso generale, da documenti che lo storico inglese non poteva conoscere.

Intanto osserviamo che la disposizione dei trattati 2)-5) di DEMOCRITO ricorda, come il TANNERY ha notato, quella dei libri d' EUCLIDE, e che il titolo dei libri 5) ci fa pensare che l'Autore abbia precorso le classificazioni degli incommensurabili da PLATONE attribuite a TEETETO, e comunque mostra che egli si è occupato di una teoria che tocca pure a questioni infinitesimali.

Ma riferimenti più diretti a tale ordine di questioni nell'opera di DEMOCRITO, ci vengono pôrti da due diverse testimonianze.

PLUTARCO (1) racconta che DEMOCRITO discuteva se le sezioni piane (assai vicine) di una sfera siano uguali o disuguali, perocchè — egli diceva — se sono uguali, la sfera dovrebbe apparire come un cilindro, e se diseguali, dovrebbe mostrarsi in qualche modo come dentata. Questo accenno indica DEMOCRITO alle prese colle questioni infinitesimali cui conduce il problema delle cubature; ed acquista valore quando d'altra parte veniamo ad apprendere che l'Abderita si è occupato appunto di cubature. Tale precisa testimonianza ci è recata da ARCHIMEDE in una lettera ad ERATOSTENE che costituisce la prefazione alla sua operetta *Sul metodo* recentemente scoperta (2).

ARCHIMEDE, mandando all'amico uno scritto che contiene due teoremi sulle cubature, debitamente dimostrati, crede opportuno di comunicargli anche il metodo di ricerca di cui si è servito, affinchè egli pure possa valersene « per scoprire certe verità matematiche col mezzo della meccanica »; ed in realtà si tratta di procedimenti infinitesimali che ricordano quelli dei così detti precursori del Calcolo infinitesimale, nel Rinascimento. Ora è notevole che ARCHIMEDE non considera in alcun modo codesti procedimenti come « dimostrazioni », ma dice che « riesce più facile, dopochè con tale metodo si sia acquistata una cognizione all'ingrosso delle questioni, d'immaginarne la dimostrazione, che se si cer-

(1) *Adv. Stoic. de commun. notit.*, p. 1079 (DIELS, B. 155, II, 90).

(2) Cfr. HEIBERG, in « Hermes », t. 42 (1907); HEIBERG e ZEUTHEN, « BIBL. MATH. » III serie, t. 7 (1907). Una traduzione italiana della lettera indicata d'ARCHIMEDE trovasi in LORIA, op. cit., pag. 326.

Digitized by Google

casse questa senza alcuna nozione preliminare ». Quindi egli continua : « Per la stessa ragione riguardo ai teoremi di cui EUDOSSO per primo ha scoperto le dimostrazioni — cioè che il cono è il terzo del cilindro, la piramide il terzo del prisma aventi eguale base ed eguale altezza — il merito ne va fatto risalire in buona parte a DEMOCRITO, che per primo ha dato senza dimostrazione le proposizioni relative a tali figure ».

Dunque DEMOCRITO ha scoperto per primo la cubatura della piramide, che dà luogo già ad un difficile problema d'analisi infinitesimale, e — seguendo lo stesso ordine di considerazioni — ha esteso il resultato al cono. Insieme con questa conoscenza precisa, la testimonianza d'ARCHIMEDE apre l'adito a supporre che i metodi meccanici d'integrazione (cubatura) adoperati dal matematico siracusano si riattacchino, in qualche modo, a metodi geometrici analoghi adoperati dal geometra d'Abdera.

Qui vi è pur luogo a fare un'altra osservazione relativa ai criterî con cui deve procedere la ricostruzione storica dell'opera di DEMOCRITO.

Prima che venisse scoperta l'anzidetta lettera d'ARCHIMEDE ad ERASTOTENE, si doveva ritenere, in base ad un'altra esplicita affermazione dello stesso ARCHIMEDE (contenuta nella prefazione al *De sphaera et cylindro*), che la cubatura della piramide appartenesse senz'altro ad EUDOSSO. Si badi che le due testimonianze non si contraddicono punto ! ARCHIMEDE, sia per proprio rigido criterio logico, sia per ossequio all'opinione scientifica dominante nell'ambiente accademico alessandrino, ritiene che il vero autore d'un teorema sia, non colui che per primo vi è giunto con un procedimento più o meno rigoroso, ma colui che ne ha fornito una (vera) dimostrazione, cioè una dimostrazione impeccabile. Molti matematici contemporanei sono dello stesso avviso, e — non preoccupati della storia — giungerebbero, colle migliori intenzioni del mondo, a spogliare per esempio i fondatori del calcolo infinitesimale delle loro scoperte, a favore dei critici, come CAUCHY o WEIERSTRASS o DINI, che due secoli più tardi vi hanno portato il rigore delle dimostrazioni.

Ora, se DEMOCRITO, come tutto porta a credere, si moveva nell'ordine delle questioni infinitesimali, è chiaro che egli non poteva fare matematica rigorosa, per quanto sia verosimile che si sia preoccupato — quanto per lui era possibile — di questa esigenza. Pertanto la posterità, che trovava ogni difetto di rigore

Digitized by Google

rimosso dall'opera dei suoi successori, aveva in ciò un motivo per dimenticare quanto gli era dovuto, a profitto di questi.

Tuttavia tali motivi non bastano a spiegare il silenzio di PROCLO, che nel suo sunto storico non nomina affatto DEMOCRITO fra i matematici precedenti ad EUCLIDE e ad EUDOSSO (e pare impossibile che il nome di lui non si trovasse nelle storie d'EUDEMO!). Quindi siamo costretti ad attaccare l'imparzialità dello storico e a sospettare che PROCLO, platonico, abbia voluto, per quanto gli era possibile, condannare all'oblìo il rivale di PLATONE, in cui egli doveva vedere un po' il diavolo, propugnatore dell'atomismo e del materialismo!

È lecito terminare questo discorso facendo qualche congettura sui procedimenti che DEMOCRITO poteva adoperare nel calcolo del volume della piramide?

Per ciò conviene prender per base la supposizione che EUDOSSO, pur convertendo il metodo infinitesimale in una riduzione all'assurdo (portata dal metodo d'esaustione), abbia conservato la costruzione di DEMOCRITO, e questa sia passata poi nella prop. 4 del libro XII dell'EUCLIDE. Allora si è indotti ad ammettere che DEMOCRITO potesse arrivare alla cubatura della piramide utilizzando direttamente la somma della progressione geometrica, che abbiam visto contenuta negli argomenti di ZENONE. Infatti la costruzione euclidea (che porge la decomposizione della piramide triangolare in due prismi equivalenti e in due piramidi simili alla data) conduce ad esprimere il volume della piramide, T, per mezzo di quello del prisma, P, di ugual base ed altezza, mediante la formula

$$T = P\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots,\right) = \frac{1}{3} P.$$

D'altronde non si può nemmeno escludere che DEMOCRITO, in occasione del detto problema, sia stato condotto in qualche modo anche all'altro metodo dell'analisi infinitesimale che troviamo usato da ARCHIMEDE, cioè a quello che fu poi svolto da CAVALIERI sotto il nome di « metodo degli indivisibili », e che risponde alla nostra considerazione degli « integrali ». Infatti la decomposizione della piramide in tanti piccoli strati (approssimativamente prismatici) poteva in lui ricorrere per fornire una prova sensibile dell'equivalenza delle piramidi con basi uguali ed altezze uguali. Tuttavia, mentre il riferimento sopra citato di PLUTARCO mostrerebbe il

Digitized by Google

nostro geometra preoccupato dalle difficoltà concettuali inerenti a questo metodo, non è detto nemmeno che DEMOCRITO riuscisse a superare la difficoltà inerente al calcolo della serie dei quadrati dei termini d'una progressione aritmetica a cui si è condotti per la detta via: della quale scoperta, se non si trovino riattacchi nelle ricerche pitagoriche, conviene forse lasciare il merito ad ARCHIMEDE.

In ciò che precede è ricorso più volte il nome di EUDOSSO di Cnido, matematico ed astronomo, filosofo contemporaneo (1) ed amico, ma probabilmente anche un po' rivale di PLATONE. Secondo le attestazioni di ARCHIMEDE, che abbiamo ricordate, si deve attribuire specialmente ad EUDOSSO, la sistemazione critica delle determinazioni di aree e volumi, toccanti all'analisi infinitesimale; mentre un anonimo scoliasta, commentando il 5° libro dell' EUCLIDE, attribuisce a lui la teoria generale delle proporzioni (indipendente dalla commensurabilità delle grandezze).

Nel campo ristretto in cui egli doveva muoversi, EUDOSSO ha foggiato un metodo d'analisi che non la cede in rigore ai procedimenti introdotti dalla più recente critica nel Calcolo infinitesimale; la superiorità di questi è soltanto nella maggior larghezza e facilità d'applicazione. Ma il criterio filosofico rimane, nei due casi, il medesimo; si tratta invero di ricondurre sempre ogni ragionamento sull'infinito o l'infinitesimo alla considerazione di un sistema di diseguaglianze.

Al metodo d'esaustione d' EUDOSSO, sia che egli ne sia stato senz'altro l'inventore, sia che — trovandone qualche esempio in geometri precedenti (come abbiam detto essersi supposto da alcuno) ne abbia soltanto sistemizzato l'uso — si può muovere soltanto il rimprovero di nascondere la via naturale che il pensiero è indotto a percorrere nei problemi dell'analisi infinitesimale. Ma ad una siffatta obiezione risponde l'esempio d'ARCHIMEDE, che ritorna a codesti procedimenti non rigorosi come a metodi di scoperta, e dà loro maggiore estensione coll'impiego di questioni meccaniche, mentre — d'altra parte — convalida i resultati acquisiti con dimostrazioni rigorose di tipo eudossiano; onde appare che il rigore critico non riesce effettivamente a fermare lo svi-

(1) Vissuto fra il 408 e il 353 a. C., ovvero un po' più tardi secondo il SUSEMIHL che ne porta la nascita al 390 a. C.

Digitized by Google

luppo della scienza se non per gli spiriti che sono già fermi: sulla via del Siracusano passarono pure i grandi matematici del Rinascimento, i costruttori del Calcolo infinitesimale!

Qui è opportuno rilevare esplicitamente che in sostanza tutti i metodi del calcolo s'incontrano già nell'opera d'ARCHIMEDE (1): la somma delle serie infinite nella quadratura della parabola (2), e il metodo degl'indivisibili (3) (corrispondente al moderno processo d'integrazione) nei trattati sulle spirali, i conoidi e gli sferoidi (4); infine — a proposito delle spirali — anche il calcolo delle tangenti. Il resultato più brillante delle investigazioni archimedee, è, notoriamente, la determinazione del volume e — ciò che è ancora più difficile — della superficie della sfera; onde a ragione il grande geometra volle sulla sua tomba un monumento che ne ricordasse la scoperta, cioè una sfera iscritta in un cilindro: il qual monumento doveva ritrovare e restaurare, un secolo e mezzo più tardi, CICERONE, trovandosi questore in Sicilia.

§ 9. **Il concetto della linea e la polemica antimatematica dei sofisti.** — Il discorso sullo sviluppo dell'analisi infinitesimale presso i Greci, conducendoci fino ad ARCHIMEDE, ci ha allontanati dal periodo di elaborazione critica dei principî della geometria, che viene aperto dalla polemica antipitagorica degli Eleati. Sulla strada di questa critica, proprio alla fine del secolo V a. C., troviamo le sottili disquisizioni dei Sofisti.

L'opera dei quali, discreditata volutamente da PLATONE ed ARISTOTELE, è nel comune concetto così svalutata che riesce impossibile comprendere come il mondo greco dell'epoca di PERICLE potesse prenderla sul serio. Senonchè un più giusto apprezzamento della sofistica fu dato fino da HEGEL, e specialmente dal GROTE e dal LEWES, che hanno riconosciuto in quel movimento di pensiero un indirizzo empirico e positivo, affatto simile al positivismo moderno.

In una maniera più determinata crediamo si possa spiegare la

(1) *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii*, Lipsia, 1880-81.

(2) Qui interviene proprio la serie geometrica $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} \dots = \frac{1}{3}$ che abbiamo incontrato nella cubatura della piramide.

(3) Queste integrazioni sono sempre ricondotte alla somma di serie infinite, per esempio della progressione aritmetica, della serie dei quadrati dei termini d'una progressione aritmetica ecc.

(4) Cfr. l'art. di TOGLIATTI, in « Periodico di Matematiche », n. 4, 1922.

Digitized by Google

filosofia dei sofisti come antitesi al razionalismo metafisico e metamatematico della scuola d' Elea (1) e così che i *Discorsi demolitori della Verità* di PROTAGORA (2) e lo scritto *Sulla natura o su ciò che non esiste* di GORGIA (3), vadano interpretati, non già come semplici scherzi o giuochi di parole, ma dando alle parole « verità » (ἀλήθεια) e « esiste o esistente » (τὸ ἐόν) il significato tecnico preciso che esse avevano assunto traverso le speculazioni degli Eleati, dove appunto la verità razionale viene opposta all' opinione (δόξα) che esprime la conoscenza empirica, e l'esistenza riceve pure un analogo significato, al lume dei principî logici che la condizionano.

Ora, poichè i sofisti hanno attaccato le vedute razionalistiche della scuola d' Elea per ciò che importano di assurdo rispetto al senso comune, si è indotti a cercare se — penetrando più addentro nel tempio di quella metafisica — abbiano anche affrontato la critica dei concetti matematici, da cui essa trae origine. Effettivamente si trova in ARISTOTELE qualche accenno ad una polemica antimatematica dei sofisti, che indirettamente getta pure qualche lume sull'ambiente in cui si svolse la critica dei principî della geometria, in connessione collo sviluppo delle vedute infinitesimali.

Met., II, 2 (20) (4): « .... Invero le linee sensibili non sono quali le dicono i geometri, poichè nessuna delle cose sensibili è così (rigorosamente) retta o curva. Difatti la circonferenza non tocca la retta (tangente) in un punto, ma come diceva PROTAGORA redarguendo i geometri, secondo un elemento di una certa lunghezza α ».

A questa polemica si può forse riferire lo scritto di DEMOCRITO citato innanzi, *Sopra una differenza d'opinione* : « .... DEMOCRITO, per la posizione razionalistica che ha a comune con PLATONE (5), doveva sostenere naturalmente il concetto matematico ».

Ma PROTAGORA non è il solo dei sofisti in cui si scorga una polemica antimatematica ; anzi è probabile che la logica di un rigoroso empirismo e la posizione storica avversa alla filosofia eleatica, li tragga tutti, più o meno, a vedute somiglianti ; che rice-

(1) Per PROTAGORA quest' antitesi resulta da una testimonianza di PORFIRIO (in EUSEBIO) : cfr. DIELS, B. 2.

(2) PROTAGORA d' Abdera nacque 25 anni prima che DEMOCRITO, cioè probabilmente nel 485 e morì nel 415 (a. C.).

(3) GORGIA di Lentini (circa 483-400 a. C.).

(4) B. 2, 997 b, 32, in DIELS, B. 7.

(5) SESTO, *Adv. Math.*, VII, 389, dice che : DEMOCRITO e PLATONE sostenevano l'esistenza degli « intelligibili » contraddicendo a PROTAGORA.

Digitized by Google

vono lume dalla tradizione non interrotta dell'empirismo greco, quale si trova rappresentata nell'interessante scritto di SESTO EMPIRICO, *Adversus geometras* (1).

Appunto in senso polemico dobbiamo interpretare il cosiddetto tentativo di ANTIFONTE per la quadratura del cerchio, di cui ARISTOTELE (2), facendosi eco manifestamente dell'opinione dei geometri, dice che non spetta al geometra di confutarlo perchè « non è fondato sui principî ». Il commento di SIMPLICIO (3) spiega che ANTIFONTE ragionava così : si iscriva nel cerchio un quadrato (4) e quindi un poligono regolare avente il doppio numero di lati e così via ; tutti i poligoni regolari ottenuti sono quadrabili, cioè si lasciano trasformare in quadrati con una semplice costruzione ; ma proseguendo i successivi raddoppiamenti di lati di cui sopra è detto, i nominati poligoni vengono a confondersi col cerchio, quindi si ottiene anche la *costruzione* di un quadrato equivalente al cerchio (*sic*).

Nonostante la condanna esplicita di ARISTOTELE, si è tentato da qualcuno una difesa di questa soluzione sofistica : la quale acquisterebbe qualche pregio matematico se si potesse ammettere che ANTIFONTE — pure scambiando la ricerca della *misura* con quella della *costruzione* — sia stato il primo a considerare la serie infinita dei poligoni iscritti nel cerchio, venendosi quindi a collocare il suo tentativo fra i primi (e sia pure imperfetti) conati dell'analisi infinitesimale. Ma — poichè ANTIFONTE, contemporaneo di SOCRATE (con cui si dilettava a disputare di filosofia) è assai probabilmente posteriore ad IPPOCRATE di Chio, — le considerazioni già svolte (nel § 7) intorno a questo geometra, che riflette uno stato più elevato della questione, portano ad escludere l'accennata interpretazione. Conviene dunque (collo ZEUTHEN) accogliere la testimonianza di ARISTOTELE, ritenendo che la quadratura d'ANTIFONTE non spetti propriamente alla geometria, ma abbia valore di polemica empiristica antimatematica. ANTIFONTE doveva sostenere che, conformemente a ciò che si vede, i poligoni iscritti

(1) In *Adversus mathematicos*, III. Anche nell'epoca moderna si ravvisa un simile atteggiamento degli empiristi e proprio in rapporto alle origini del calcolo infinitesimale. Si veda la polemica di BERKELEY contro NEWTON (*The Analist*, 1734).

(2) *Physica*, A. 1, 185 a, 14.

(3) In DIELS, B. 13.

(4) Secondo TEMISTIO un triangolo equilatero.

Digitized by Google

vengono a confondersi col cerchio, non al limite d'una serie infinita, ma semplicemente quando il numero dei lati è abbastanza grande.

E perchè non si riterrebbe all'opposto che il Nostro fosse un infinitista e volesse dunque postulare la possibilità di un procedimento trascendente?

La risposta è data dal considerare l'atteggiamento filosofico di ANTIFONTE, che è ben lungi da un siffatto razionalismo: si veda, per esempio ciò che egli dice in un frammento *Intorno alla Verità* (1): «Colui che esamina degli oggetti grandi non vede la grandezza davanti ai suoi occhi e non la riconosce nemmeno per mezzo del suo spirito». Appare qui, nella sua propria luce, l'empirista che — contro i filosofi delle idee, postulanti la realtà delle essenze matematiche — non concede altra maniera d'esistenza che l'esistenza sensibile. Al lume di questo criterio le linee dovevano essere per lui, come per PROTAGORA, delle strisce di piccola larghezza, affatto diverse da quelle che il realismo greco cercava in un mondo metafisico e che noi riconosciamo oggi come prodotti d'idealizzazione del nostro stesso pensiero.

§ 10. **Le definizioni del punto, della linea e della superficie presso i geometri del IV secolo a. C.** — La polemica antimatematica dei sofisti dovette essere presto superata nel mondo greco: e del resto appare evidente che essa interessa piuttosto la posizione filosofica di matematici idealisti, che non la loro scienza matematica.

Tuttavia le difficoltà che si manifestano nel ragionamento infinitesimale — di cui la detta polemica esprime un aspetto — dovettero dare impulso a quel movimento critico del pensiero, onde si raccolgono come frutto le dottrine che, come si è detto, furono elaborate da EUDOSSO. Frattanto lo stesso pensiero critico si vede rivolgersi all'ordinamento logico della geometria e alla sistemazione dei suoi principî: l'alto grado raggiunto da questa critica rendendo comprensibile la mirabile perfezione del trattato euclideo (2).

Interessa qui a noi di esporre in particolare le definizioni di

(1) DIELS, B. 1.

(2) Cfr. H. G. ZEUTHEN, *Sur la réforme qu'a subie la mathématique de Platon à Euclide, et grace à la quelle elle est devenue science raisonnée*; in danese con sunto in francese. «Memorie dell'Accademia delle scienze di Copenhagen», 1917.

Digitized by Google

punto, linea, superficie, correnti presso i geometri del IV secolo, che precedono l'Autore degli *Elementi*. Esse si desumono in ispecie da ARISTOTELE e sono le medesime che s'incontrano poi in tutti i trattati antichi e moderni, salvo per gli ultimi, ispirati dalla critica recentissima.

La prima definizione che si trova del punto è quella dei Pitagorici che riecheggia le più antiche concezioni della scuola e che tuttavia sembra conservarsi con significato diverso dal primitivo, anche dopo superato il periodo dell'empirismo geometrico: « Tutto ciò che è indivisibile quanto alla grandezza dicesi unità (o monade), *il punto è l'unità avente posizione* » (1).

Ora, essendosi riconosciuto che il *punto*, come diceva PLATONE (2) è una pura « finzione geometrica » (*γεωμετρικόν δόγμα*), si doveva ammettere che esso non è parte della linea, ma è il *principio della linea* (*ἀχρὴ γραμμῆς*): la quale può venirne *generata col movimento*; similmente *la linea col moto produce la superficie* (3).

Accanto a questa definizione genetica delle linee e delle superficie, che PROCLO (4) giudicherà perfetta, viene criticata da ARISTOTELE (5) un'altra definizione, adottata dai geometri dell'epoca:

Le superficie sono i termini dei solidi. Le linee sono i termini delle superficie. I punti sono i termini delle linee.

EUCLIDE ha conservato queste definizioni della linea e del punto (6), come complemento di quelle che riassumono in qualche modo il resultato negativo della polemica eleatica:

Il punto è ciò che non ha parti (Def. 1). *La linea è una lunghezza senza larghezza* (Def. 2): quest'ultima definizione essendo presa dalla scuola platonica (7).

§ 11. **Sull'ordinamento logico della scienza greca: definizioni, assiomi e postulati.** — Ora dobbiam chiederci: quale valore hanno le precedenti definizioni?

Per rispondere occorre esaminare il significato dell'ordinamento logico della scienza.

(1) ARISTOTELE, *Met.*, 1016 b, 24; PROCLO, pag. 97, 8-13.
(2) In ARISTOTELE, *Met.*, 922 a, 20.
(3) ARISTOTELE, *De Anima*, I, 4, 409 a, 4.
(4) Pag. 97.
(5) *Topica*, VI, 4, 141 b, 20,
(6) *Elementi*, I, Def. 3, 6.
(7) ARISTOTELE, *Topica*, VI, 6, 1436, 11.

Digitized by Google

ARISTOTELE esprimeva manifestamente un concetto acquisito dai geometri del suo tempo allorchè diceva:

Analytica posteriora, I, 2, 6: « Ogni conoscenza razionale, sia acquistata sia insegnata deriva sempre da conoscenze anteriori. L'osservazione mostra che ciò è vero di tutte le scienze: infatti questo è il procedimento delle matematiche e senza eccezione di tutte le altre arti ».

Da questo stesso concetto lo STAGIRITA derivava che « la scienza dimostrativa procede necessariamente da principî veri, da principî immediati, più noti che la conclusione, di cui sono la causa ed a cui precedono ».

Quanto alla classificazione dei principî, essa appare già in ARISTOTELE conforme — almeno nei tratti essenziali — a quella che trovasi realizzata dall' EUCLIDE.

Dove si trovano tre specie di principî:

1) *termini* (*ὅροι*);
2) *nozioni comuni* (*κοιναὶ ἔννοιαι*);
3) *postulati* (*αἰτήματα*).

I termini corrispondono solo in parte alle nostre « definizioni ». I Greci concepivano un mondo degli enti matematici in corrispondenza alle idee formate nella nostra mente o alle parole che le designano. Quindi la definizione era per loro essenzialmente *reale* (e non nominale) contenendo soltanto l'indicazione dell'ente che risponde ad una certa parola: così il termine poteva venire spiegato per mezzo di altri concetti, ovvero semplicemente introdotto con una parola di cui si supponga noto il significato.

Le nozioni comuni — che il linguaggio pitagorico designava come *assiomi* — insieme ai postulati, costituiscono le proposizioni primitive su cui vuolsi fondare la dimostrazione di tutte le proprietà che si esporranno nel trattato.

Secondo il criterio aristotelico, di cui sopra è fatto cenno, l'ordine dimostrativo della scienza sarebbe un ordine naturale e perciò la scelta di siffatte proposizioni sarebbe subordinata, non tanto a criterî di convenienza, quanto ad una vera necessità logica. Rimane sempre traccia di tale veduta nel presupposto di certe discussioni assai comuni, dove si tratta di decidere se una data proposizione (presa in se stessa) sia un assioma o un postulato o piuttosto un teorema, cioè se « possa o non possa dimostrarsi ». Ma già prima di ARISTOTELE si era affacciata la veduta superiore di fronte a cui tali discussioni perdono senso, che l'ordine logico

Digitized by Google

di una scienza dimostrativa è relativo, potendosi dimostrare i principî per mezzo delle conclusioni, così come le conclusioni dai principî.

Quanto alla differenza fra assiomi e postulati nella geometria greca, siamo informati da PROCLO (1) che essa veniva fatta secondo tre criterî:

1) Per GEMINO, gli assiomi differiscono dai postulati come i problemi dai teoremi, o le identità dalle equazioni. I postulati sarebbero precisamente i principî cui si riduce la risoluzione dei problemi, aventi quindi il carattere di proposizioni *esistenziali*, giusta l'osservazione dello ZEUTHEN che la costruzione aveva appunto pei Greci l'ufficio di stabilire l'esistenza delle figure. Questo carattere si riconosce invero ai postulati euclidei, con esclusione del 4°: « tutti gli angoli retti sono eguali »; ma ZEUTHEN spiega come in tale affermazione debba vedersi un complemento del post. 2, nel senso di affermare che il prolungamento di una retta è unico.

2) PROCLO osserva pure che gli assiomi e i postulati differiscono anche per essere, questi principî particolari della geometria, e quelli, principî comuni alle varie scienze, poichè si tratta in essi delle proprietà generali della eguaglianza e diseguaglianza delle grandezze.

3) Infine la distinzione fra le due specie di principî si accorda anche col criterio d'ARISTOTELE che riconosce negli assiomi delle verità necessarie ed indimostrabili perchè evidenti di per se stesse, mentre i postulati sarebbero verità partecipanti ad un'altra specie di evidenza (sensibile), che non resultano egualmente, in modo necessario, dal significato dei termini.

Fra queste varie maniere di distinzione è soprattutto la terza che è sopravvissuta nella comune coscienza fino ai nostri tempi; e sventuratamente è proprio quella che appare di fronte alla critica priva di valore: perchè un'analisi adeguata scopre anche nelle verità che si pretendono evidenti *a priori*, l'espressione di esperienze elementari, e cioè delle verità della stessa natura di quelle che vedonsi espresse nei postulati. Per tale motivo la logica moderna delle matematiche non distingue più fra assiomi e postulati e dà egualmente il nome di postulati a tutte le proposizioni pri-

(1) Pag. 193. Cfr. G. VAILATI, *Intorno al significato della differenza fra gli Assiomi ed i Postulati nella Geometria greca.* « Scritti », pag. 547.

Digitized by Google

mitive (comunque evidenti) che si assumono, senza dimostrazione, a fondamento di un ordine deduttivo delle proposizioni.

§ 12. **I criterî della logica moderna.** — Nella lunga tradizione dell'insegnamento geometrico, che si riattacca agli *Elementi* d' EUCLIDE, i criterî dell'ordinamento logico dei Greci sembrano conservarsi immutati fino ai tempi più recenti. Ma un secolo di critica per molti aspetti analogo a quello che precede l'opera euclidea, ci ha appreso insieme a comprendere tutta la raffinatezza della critica che essa esprime, e a superare quella maniera d' intendere i principî. D'altronde siffatto progresso procede da una lunga evoluzione della logica, che matura appunto nel pensiero dei geometri contemporanei e conduce ad una comprensione chiara e determinata dell'ordine di una scienza deduttiva, per la prima volta, nelle « Vorlesungen über neuere Geometrie » di MORITZ PASCH, del 1882.

Questa storia interessante abbiamo tentato di ricostruire altrove (1): qui ci limiteremo a indicare in breve il resultato raggiunto.

I nostri criterî logici differiscono da quelli degli antichi specialmente per ciò che si attiene alla definizione. Poichè, in luogo di vedere nelle idee geometriche l'immagine di una realtà trascendente al pensiero, vi scorgiamo soltanto delle produzioni dello stesso pensiero, foggiate a rappresentare la realtà sensibile. In accordo con questa veduta sta il concetto che tutte le definizioni matematiche (o anche tutte le definizioni *logiche*) sono puramente *nominali*, suggello e espressione del processo mentale per cui certi concetti vengono costruiti da altri dati, e non *reali*, cioè atte ad indicare qualcosa che si trovi già dato in una classificazione naturale, fuori di noi. Pertanto la definizione è da intendere, conformemente al criterio rigoroso di BLAISE PASCAL, come valevole a sostituire, per ogni effetto, il definito, e quindi come un procedimento di riduzione affatto analogo alla deduzione: in questa si tratta di derivare la verità di una proposizione da altre premesse, in quella si tratta di spiegare il significato di un concetto per mezzo di altri concetti supposti noti.

Ciò posto, allo stesso modo che la deduzione fa capo ad un certo numero di postulati, che debbono venire assunti senza dimostrazione (logica), è manifesto che la definizione fa capo a ta-

(1) Cfr. ENRIQUES, *Per la storia della logica: i principî e l'ordine della scienza, nel concetto dei pensatori matematici*, Bologna, Zanichelli, 1922.

Digitized by Google

luni concetti fondamentali, avanti ai quali non se ne trovano altri per mezzo dei quali possano venir definiti.

Dunque, in ogni momento dello sviluppo della scienza, il suo ordine logico deve muovere da dati (concetti e proposizioni) esplicitamente presi come non riducibili, per fondarvi definizioni e dimostrazioni; e alla base di una trattazione logica della geometria si dovrà trovare la dichiarazione dei *concetti primitivi* o *fondamentali*, e dei *postulati*, ossia delle *proposizioni fondamentali*, che ne esprimono i rapporti più elementari.

Più precisamente nelle ricerche critiche inerenti ai principî delle matematiche si sono affermati alcuni criterî che esprimono le norme di una trattazione logica idealmente perfetta, e tendono nel loro insieme ad un avvertimento più chiaro dell'uso che facciamo della intuizione, e ad una separazione di ciò che è logico da ciò che è intuitivo. Tali criterî sono i seguenti:

a 1) Tutti i concetti che compariscono nella trattazione debbono esser dati esplicitamente come *primitivi* o *fondamentali*, senza definizione, o venir definiti logicamente per mezzo dei concetti primitivi.

In ultima analisi, dunque, non debbono entrare nella trattazione se non i concetti primitivi, ed i *concetti puramente logici*, come p. es. i concetti di *appartenenza* (significato dal verbo « essere » o « contenere »), di *ordine*, di *corrispondenza*, ecc.

2) È desiderabile che i concetti primitivi siano fra loro *assolutamente indipendenti*, per modo che non sia possibile definire logicamente uno qualunque di essi per mezzo degli altri.

b 1) Tutte le proposizioni che compariscono nella trattazione debbon essere enunciate esplicitamente come *postulati*, o venire logicamente dimostrate per mezzo di altri postulati.

In ultima analisi, dunque, non debbono entrare nel ragionamento, se non le premesse contenute nei postulati e gli *assiomi* esprimenti le leggi della logica deduttiva.

2) È desiderabile che i postulati siano fra loro *assolutamente indipendenti*, per modo che nessuno di essi possa essere dimostrato in base ai rimanenti.

Le condizioni *a* 1) e *b* 1) sono essenziali, perchè si abbia una geometria trattata in modo *rigorosamente* logico. Esse permettono di dimenticare il contenuto dei concetti che vi figurano, considerando la trattazione stessa come una *teoria logica astratta* nella quale entrano soltanto dei simboli non determinati, legati

Digitized by Google

da certe relazioni; e dove pertanto *il sistema dei postulati costituisce la definizione implicita dei concetti fondamentali*, presi nel loro insieme.

Questo modo astratto di concepire la geometria ha una grande importanza, perchè fissando in varie guise il senso dei simboli indicati, si possono ottenere varie *interpretazioni* di una stessa teoria astratta, riuscendo così a porre un legame fra più teorie geometriche concrete; un tale legame consiste in ciò che « si possono tradurre tutte le proposizioni dell'una teoria in proposizioni dell'altra, sostituendo, in modo determinato, i concetti che figurano nella prima con quelli della seconda ». Un esempio di ciò si ha nella *legge di dualità* della geometria proiettiva o della geometria sferica.

Ogni insieme di proposizioni, che soddisfi ai requisiti *a* 1) e *b* 1), può considerarsi come una *teoria logica astratta*, capace di ricevere generalmente varie interpretazioni concrete (geometriche o non geometriche), purchè le ipotesi espresse dai postulati siano *logicamente compatibili*, ossia non *contraddittorie*.

La possibilità di ricevere una interpretazione intuitiva sicchè la teoria possa riguardarsi come esprimente un insieme di rapporti fra concetti nettamente rappresentati, assicura praticamente che la condizione di compatibilità è soddisfatta. Per la geometria dunque, in quanto essa è fondata sulla intuizione, non ci domanderemo se i postulati sono compatibili, purchè essi siano intuitivamente evidenti.

I requisiti *a* 2), *b* 2) esprimono piuttosto condizioni di *eleganza* della trattazione, anzichè condizioni di rigore. Ed appariscono veramente importanti per riguardo alle possibili generalizzazioni della geometria.

L'indipendenza di più concetti può essere riconosciuta immediatamente coll'intuizione in un senso psicologico (ad es. quando si tratta di concetti rientranti in diverse categorie logiche), ed allora essa può servir di base al riconoscimento della indipendenza di alcuni gruppi di postulati.

Da un punto di vista logico l'indipendenza suaccennata non ha senso finchè non si enuncino i postulati, che nell'intuizione sono supposti, perciò quando si dirà che il *concetto* C *non può esser definito per mezzo di* A, B (o che è indipendente da essi) bisognerà aggiungere: *rispetto a un dato sistema di postulati* (a, b, c....), che costituisce la definizione implicita di *A*, *B*, *C*.

Digitized by Google

Per verificare l'indipendenza anzidetta A. PADOA ha proposto il seguente procedimento: si cerchino due interpretazioni della teoria assegnando ad A, B significati determinati e a C due significati diversi, per modo che una proposizione vera nella prima interpretazione risulti falsa nella seconda; allora è chiaro che C non può essere definito per mezzo di A, B rispetto ai postulati assegnati.

Si può riconoscere che un postulato a è indipendente da altri dati b, c..., facendo vedere che l'ipotesi opposta ad a è compatibile colle b, c.... Perciò si presenta naturale il procedimento seguente: si attribuisca convenzionalmente un senso, diverso dal senso originale, ai simboli che entrano nella trattazione a denotare i concetti primitivi, e si cerchi così di *interpretare* la teoria logica basata su b, c.... e sulla negazione di a, in un modo conforme all'intuizione. La possibilità di una siffatta interpretazione serve a stabilire l'indipendenza domandata.

Volendosi l'indipendenza assoluta di un sistema di postulati, occorre anzitutto che essi vengano formulati in modo *non ricorrente*, cioè che ciascuno di essi abbia un senso prescindendo dagli altri. In mancanza di questo requisito si potrà domandare soltanto l'*indipendenza ordinata*, ossia l'impossibilità di dedurre ciascun postulato dai *precedenti*.

L'indipendenza di un sistema di postulati è anche relativa alla *composizione* dei postulati stessi. Quando una proposizione a si lasci scomporre in due altre (*più semplici*) a', a'', che prese insieme equivalgono ad a, può ben accadere che la a non dipenda dalle altre proposizioni date b, c..., ma che in base alle b, c.... si riesca a dimostrare la a'; allora è chiaro che il postulato a contiene qualche cosa di superfluo, potendo essere limitato alla proposizione a''.

Si può istituire una analoga osservazione relativamente all'indipendenza dei concetti fondamentali, ove si consideri la possibilità di sostituire un dato concetto A *più particolare*, con due altri B e C *più generali*, per modo che A risulti definito come interferenza delle classi di enti B e C.

L'indipendenza dei concetti e delle proposizioni fondamentali ha dunque un valore tanto più significativo quanto più sono osservate le condizioni di:

a 3) *Generalità* dei concetti.

b 3) *Semplicità* dei postulati.

Digitized by Google

È possibile considerare concetti assolutamente generali e proposizioni assolutamente semplici, non suscettibili di venire decomposte in più altre?

A questo proposito A. PADOA ha fatto un'osservazione risolutiva. Qualsiasi proposizione si riduce in ultima analisi ad affermare che un oggetto a non coincide nè con b, nè con c..., dove b, c.... sono oggetti particolari ben determinati. Pertanto la sola proposizione assolutamente semplice è quella del tipo: a non è b. Ma con proposizioni di questo tipo, prese in numero finito, non si arriverebbe mai a postulare quell'insieme di proposizioni che caratterizzano i concetti più comuni della geometria. Si può tuttavia attribuire alle condizioni a 3) e b 3) un valore relativo convenientemente precisato, ed *avvicinarsi* così in vari modi ai criterî di perfezione logica sopra indicati.

§ 13. **I principî della geometria rispetto all'intuizione.** — All'enunciato delle norme logiche, cui deve soddisfare l'ordine della geometria come scienza deduttiva, stimiamo opportuno di aggiungere le seguenti riflessioni.

Riferendoci ai motivi storici che hanno generato l'analisi logica dei principî, si può dire che questa ha come scopo principale di avvertire distintamente gli atti che la nostra intuizione compie, ogniqualvolta rileva i rapporti fra oggetti che cadono immediatamente nel suo dominio; e così rendere possibile un controllo regolare del dato intuitivo. Sotto questo aspetto si presentano, quasi in contrapposto coi criterî logici sopra indicati, alcune osservazioni:

c 1) I postulati debbono esprimere immediatamente i rapporti fra i concetti primitivi che formano oggetto della nostra visione immaginativa senza che occorra aggiungere a questi la rappresentazione di qualche altro oggetto. Questa condizione porta talvolta ad assumere concetti primitivi non indipendenti.

Se intendiamo che il concetto A venga definito logicamente per mezzo di altri concetti B, C..., anche le proprietà di A dovranno essere dedotte da quelle (che ci vengono rivelate dalla intuizione) di B, C...; quindi se nella trattazione figura un postulato desunto dal modo con cui A viene intuito, questo porta l'implicita considerazione di un nuovo elemento concettuale primitivo, non contenuto in B, C....

Un esempio di ciò è offerto dalla proposizione fondamentale

Digitized by Google

del piano: se si pensa la *retta* come un ente primitivo, e si vuol *definire* il *piano* colla proiezione della retta da un punto esterno, si deve anche dimostrare che la superficie così costruita contiene ogni retta determinata da due dei suoi punti; se invece si dà questa proposizione come un postulato, si deve riguardare anche il piano come un ente primitivo, in quanto la nominata proposizione non potrebbe essere intuita se ci formassimo soltanto un'immagine mentale della retta e non avessimo una rappresentazione del piano.

c 2) La rappresentazione intuitiva che ci formiamo dei nostri concetti ci presenta spesso una gerarchia di generi e specie, per modo che i concetti più particolari appaiono definiti per le loro differenze specifiche rispetto ad un concetto più generale.

In tal caso l'intuizione ci porge una serie di postulati ricorrenti, per i quali non si può parlare d'*indipendenza assoluta*, ma soltanto d'*indipendenza ordinata*.

L'assoluta indipendenza dei postulati esige dunque la costruzione di diverse gerarchie di concetti, dove i concetti particolari vengano generalizzati in modi diversi.

c 3) La nostra rappresentazione intuitiva dello spazio incontra prima dei concetti particolari e sale per astrazioni successive ai concetti più generali.

Non diremo per questo che i concetti più generali allorchè sono intuiti abbiano un minor grado di evidenza in confronto ai particolari: ma l'evidenza loro sta in rapporto ad uno stato della mente più progredito, in cui si esercita una facoltà di rappresentazione più astratta.

Dunque dal punto di vista intuitivo la generalità dei concetti che si possono scegliere come fondamentali per la geometria (e quindi in certo modo anche la semplicità dei relativi postulati) ha un limite nella nostra capacità di rappresentazione dell'astratto.

Ora si presenta qui un secondo scopo dell'analisi logica dei principî. Quest'analisi può soccorrere allo sviluppo della intuizione geometrica e spingere il lavoro di astrazione produttore di concetti più generali, mercè la costruzione logica di oggetti che potranno venire rappresentati più tardi. La logica disseccando in certo modo i dati intuitivi, colla semplificazione dei postulati, ci presenta infinite combinazioni diverse di questi, cui corrispondono infiniti concetti possibili. Ma definire logicamente un concetto significa soltanto indicarne una rappresentazione mediata che

Digitized by Google

può costruirsi con una combinazione opportuna dei dati. In realtà però tale combinazione tende psicologicamente ad essere surrogata da una vera e propria visione immaginativa del concetto definito, non appena a questo si colleghino delle associazioni che gli conferiscono un *interesse*; e solo allora può dirsi che la combinazione logica, arbitrariamente fissata colla definizione, si converte in uno sviluppo duraturo per la scienza.

Queste riflessioni mostrano che, per quanto la logica possa soccorrere al processo di astrazione costruttivo dei concetti, essa non può da sola surrogare le associazioni psicologiche che costituiscono cotesto processo. Se non si vuole un'astrazione illusoria, bisogna educare la capacità rappresentativa dell'astratto, ricorrendo anche a mezzi sperimentali.

Sarà opportuno illuminare le cose dette con qualche esempio. L'idea che comunemente ci si forma della « linea » e della « superficie » ricavata per astrazione da pochi casi particolari è molto meno generale di quella accolta dal geometra. Chi ha avuto sott'occhio soltanto il piano, la sfera, i coni, i cilindri ed altre analoghe superficie a *punti ellittici* o *parabolici* non si rappresenta una superficie a *punti iperbolici*, attraversata in ciascun punto dal piano tangente. E la dimostrazione analitica della possibilità di questo caso non potrebbe riguardarsi che come l'anticipazione di una esperienza, quale ci viene fornita, per esempio, dalla costruzione dell'*iperboloide rigato*.

Lo stesso si può dire per la superficie di Möbius, modello di superficie *unilatera*, per cui si dimostra falso il comune giudizio che ogni superficie abbia due facce ben distinte ed irriducibili per moto continuo.

La conoscenza delle superficie a punti iperbolici e delle unilatere allarga il comune concetto della superficie, permettendoci di abbracciare coll'intuizione un maggior numero di casi. Ma non sembra possibile limitare il progresso di questa intuizione, poichè uno studio ulteriore ci conduce a considerare linee e superficie con infinite oscillazioni, linee senza tangente, superficie senza piano tangente ecc.; e di questi enti si può anche in un certo senso, e fino ad un certo punto, formarsi una rappresentazione, come, per esempio, quando una linea della specie suindicata viene definita per mezzo di una poligonale variabile che tende ad un limite con legge determinata.

Riassumendo le considerazioni svolte innanzi, diremo che:

Digitized by Google

la critica dei principî della geometria fa parte di quel processo di costruzione e di elaborazione di concetti che costituisce lo sviluppo della scienza nei suoi rami più elevati. In ispecie l'ufficio dell'analisi logica in codesto processo è di *distinguere* gli atti d'intuizione, e di soccorrere ad *astrazioni* successive; così si prosegue lo sviluppo della intuizione geometrica, che mette capo a *spazi intuitivi superiori*, variamente interessanti.

§ 14. **I concetti di punto, linea e superficie davanti alla critica moderna.** — Al lume dei criterî logici che abbiamo innanzi analizzati, appare manifesto come le definizioni date dai Greci per il punto, la linea e la superficie, non siano affatto definizioni nel senso proprio della parola, ma formule atte a richiamare i due procedimenti con cui la nostra mente idealizzatrice passa dal solido alla superficie che lo termina, e quindi alla linea e al punto, o per contro dall'immagine del punto mobile alla linea generata dal moto, e poi dalla linea mobile alla superficie e da questa al solido. Che, invero, cotali formule non valgano a *definire* i concetti che vogliono spiegare, resulta da ciò che nello sviluppo della geometria non se ne fa uso alcuno, riferendosi invece a talune proprietà che l'intuizione dei concetti descritti in quelle formule ci suggerisce come evidenti.

D'altronde se si vuol tentare una definizione del punto, della linea e della superficie, ovvero di alcuni fra questi concetti, bisogna pure supporre altri concetti primitivi. Non è impossibile, per esempio, definire il punto quando si assumano come primi i concetti fondamentali di *solido* (corpo rigido) e di *movimento*, debitamente analizzati.

A tale scopo si riterranno i movimenti come corrispondenze o *trasformazioni* operanti nella classe che ha per elementi i solidi: si avrà così un *gruppo di trasformazioni*, cioè un sistema di trasformazioni G tale che:

1) il prodotto di due trasformazioni di G (cioè la trasformazione che si ottiene dalle due, eseguendole, in un certo ordine, una dopo l'altra) appartiene al G;

2) insieme ad una trasformazione appartiene al G anche l'inversa.

Questo gruppo — che dipende da sei parametri — si lascia caratterizzare (con Sophus Lie) mediante certe proprietà determinative che esprimono il grado di libertà di movimento dei corpi

Digitized by Google

solidi : segue da queste che il gruppo stesso possiede dei sottogruppi dipendenti da tre parametri, che sono costituiti dalle rotazioni attorno ad un centro. Orbene, ogni punto potendosi ritenere come determinato da un siffatto sottogruppo di G, si può astrattamente definire in rapporto ad esso (POINCARÉ). Ma non è qui il luogo di insistere sopra nozioni elevate, come quelle attinenti alla teoria dei gruppi di trasformazioni, che — in una forma più elementare e per quanto concerne i movimenti della geometria — si vedranno spiegate nell'Art. Terzo.

Ora, in luogo di derivare i concetti di punto, linea e superficie da altri concetti, apparirà naturale di introdurli, essi stessi, nella geometria, come concetti primitivi, traducendone i rapporti logici con un opportuno sistema di postulati. E quanto al « punto », ognuno lo riceverà volentieri come elemento primo, ritenendo tutte le figure che via via verranno introdotte siccome « classi o insiemi di punti ». Ma per la linea e la superficie, la domanda urta in una grave difficoltà, quando — in armonia col carattere deduttivo della scienza — si voglia procedere dai concetti più generali, subordinandovi le nozioni particolari di linea *retta*, superficie *piana* ecc. Perchè — come già si è avvertito — vi è nell'intuizione delle linee e delle superficie arbitrarie qualcosa di illimitatamente estendibile.

Quindi giova piuttosto ai fini della scienza — e certo almeno ad una trattazione elementare — di procedere in maniera induttiva, cercando di caratterizzare prima particolari classi di linee e di superficie, quali sono le *rette* e i *piani*, per salire da queste a concetti vieppiù generali : sia che codesti enti (rette e piani) si assumano come concetti primitivi senza definizione, sia che si tenti di definirli per mezzo di altri concetti, come la congruenza o il movimento, siccome si vedrà nell'Art. Secondo.

Concludiamo questo studio rilevando che il nostro esame ha mostrato quale secolare evoluzione d'idee soggiaccia alla moderna critica dei principî : le cui esigenze rischiano di essere mal comprese e di condurre a virtuosità ed abusi didattici se non siano riguardate, oltrechè nel loro aspetto logico, anche nel loro significato storico.

Digitized by Google

ARTICOLO SECONDO

Sui concetti di retta e di piano, di Ugo Amaldi a Padova.

Per render conto delle questioni relative alla introduzione nella Geometria dei concetti di *retta* e di *piano*, adotteremo dapprincipio un punto di vista storico, prendendo le mosse da quella prima e, diciamo pure, semplicista soluzione che di codesti problemi logico-didattici è fornita dagli *Elementi* di Euclide. Ivi i concetti di retta e di piano sono introdotti per via di pretese definizioni reali, la cui manchevolezza, agli effetti dell'assetto logico della Geometria, non sfuggì nemmeno ai primi commentatori del testo euclideo.

Si vennero così moltiplicando le interpretazioni dei principî fondamentali degli *Elementi* e le proposte di nuove e più soddisfacenti definizioni: ma il movimento critico così determinatosi non riuscì per secoli a superare gli schemi logici della concezione euclidea dei principî della Geometria. Soltanto nell'800, traverso la elaborazione delle Geometrie non euclidee, maturò nei critici matematici quella riforma del concetto stesso di *Geometria razionale*, che si riconnette alla esplicita constatazione della vanità logica di ogni tentativo di definizione reale e della necessità di introdurre le nozioni elementari, in particolare quelle di retta e piano (o altre da cui esse possano derivare logicamente) come *primitive*, caratterizzandole con un opportuno sistema di postulati.

Di questa veduta, sotto il suo aspetto generale, è già stato discorso nell'Articolo Primo. Qui nella prima parte del presente articolo la giustificheremo da un punto di vista più elementare, traverso un rapido esame dei vari tentativi di definizione di retta e piano che ebbero, l'un dopo l'altro, fortuna nei trattati e nella scuola.

Digitized by Google

Codeste presunte definizioni riflettono, nel loro insieme, i caratteri per cui gli enti fondamentali della Geometria razionale appaiono derivare per idealizzazione dei dati della nostra intuizione. In altre parole, esse rispecchiano, sia pure in forma spesso implicita e non ben distinta, quelle proprietà degli enti fondamentali, che vanno postulate a caratterizzarli, cioè (se ci limitiamo ai caratteri *grafici*) le relazioni di *appartenenza* di punti, rette e piani, le proprietà *lineari* della retta e *superficiali* del piano, e, infine, la *tridimensionalità* dello spazio.

Nella seconda parte del nostro articolo ci occuperemo appunto di codeste proprietà, e, pur senza la pretesa di fornire un assetto logico completo e definitivo dei principî della Geometria elementare (1), abbozzeremo gli indirizzi più significativi, secondo cui quelle proprietà possono essere formulate e svolte, fino ad ottenere una conveniente definizione dei concetti di *segmento*, *angolo*, *diedro*. Ci tratterremo, in particolare, sulle proprietà di partizione del piano (mediante rette, angoli, poligoni) e dello spazio (mediante piani, angoloidi, poliedri) e accenneremo come quest'ordine di considerazioni conduca naturalmente a problemi, che, pur non esorbitando dal dominio della Geometria elementare tradizionale, possono ancora offrire utile materia di riflessione e di indagine.

I.

§ 1. **Le definizioni della retta.** — Euclide, dopo aver introdotto nei primi tre *ὅροι* (« definizioni », letteralmente « termini ») i concetti di punto (come ciò che è privo di parti e come estremità di una linea) e di linea (come lunghezza priva di larghezza) caratterizza nel quarto la *retta* nei termini seguenti: *Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.*

Di questa definizione, di cui si può ritenere che già al tempo di Proclo fosse perduto il senso autentico, sono state date interpretazioni svariate (2).

(1) Chi desidera procurarsi una visione più vasta e profonda delle indagini critiche sui principî della Geometria, legga l'articolo di F. Enriques, *Prinzipien der Geometrie.* « Encykl. der math. wiss. », Bd. III, Heft 1, Leipzig, Teubner, 1907; edizione francese, Parigi, Gauthier-Villers, 1911.

(2) Il Barozzi nella sua versione latina di Proclo traduce: *Recta linea est, quae ex aequo inter sua signa sita est.*

Digitized by Google

Alcuni (facendo reggere direttamente il *τοῖς σημείοις* da *κεῖται*) traducono: *La retta è quella linea, che giace sui suoi punti in modo uniforme* (1). E questa uniformità di giacitura si interpreta in vario senso; così vi è chi la intende nel senso che, fissati due punti quali si vogliano della retta, questa non vi si possa adagiare in più modi differenti. Altri interpretano dicendo che preso un qualsiasi segmento di retta, in tutta la estensione di questa vi sono segmenti uguali a quello. Ed altri, infine, vedono nella definizione euclidea l'affermazione che la retta è divisa in due parti uguali da ogni suo punto.

Ma, mentre la prima di codeste interpretazioni renderebbe superfluo l'assioma V: *Due rette non comprendono spazio alcuno*, le altre due non assegnano una proprietà che sia caratteristica per la retta, in quanto convengono altresì ad altre linee: la seconda alla circonferenza e all'elica circolare, la terza a quest'ultima (2).

Ingegnosa, sebbene alquanto ardita, è la interpretazione del SIMON, il quale pur mantenendo la ipotesi sintattica suindicata, traduce *κεῖται* come una forma passiva di *τίθημι*, onde la definizione diventerebbe: *Retta è quella linea che è situata pei suoi punti in modo uniforme*, cioè *la linea su cui nessun punto è distinto rispetto agli altri* (3).

Grammaticalmente e sintatticamente parmi più accettabile l'ipotesi di coloro che fanno reggere il *τοῖς σημεῖοις* dall'*ἐξ ἴσου* come un termine di comparazione, per modo che la definizione andrebbe tradotta: *La retta è quella linea che giace* (o *si distende* o, anche, è *posta*) *in modo uguale ai suoi punti*. E in appoggio di codesta traduzione letterale sta l'opinione di PROCLO, il quale, ad illustrare l'enunciato di EUCLIDE, aggiunge che la retta è l'unica linea, la cui lunghezza compresa fra due suoi punti quali si vogliano

(1) SIMON, *Euclid und die sechs planimetrischen Bücher*, Leipzig, 1901, pag. 26.

(2) Dal punto di vista storico rileviamo che, secondo PROCLO, già APOLLONIO aveva notato che l'elica circolare ha la proprietà di esser simile a se stessa in ogni sua parte (nella traduzione del BAROZZI: *Helix.... est implexa circumvolutaque linea, quae omnes sui partes omnibus secundum partium similitudinem adaptat, ut ostendit Apollonius in libro de Cochlea*). Alla osservazione di APOLLONIO si può dare una forma più precisa, ricorrendo al concetto di *gruppo di movimenti* come vedremo nei §§ 16-19.

(3) « Die Gerade ist die Linie, welche gleichmässig durch ihre Punkte gesetzt ist, d. h. die Gerade ist die Linie, auf der kein Punkt vor dem andern ausgezeichnet ist ».

Digitized by Google

coincide con la *distanza* di questi. E si potrebbe del pari osservare che la retta è l'unica linea, la cui *direzione* coincida con quella, in cui due suoi punti quali si vogliano si trovano l'uno rispetto all'altro.

Ma già troppo ci siamo indugiati su codeste interpretazioni, delle quali forse nessuna può senz'altro escludere le altre, in quanto presumibilmente ciascuna di esse riflette una faccia particolare del pensiero di EUCLIDE. È una idea preconcetta ed assai discutibile quella che ci induce a identificare la parte che EUCLIDE assegnava, nel suo edificio geometrico, agli *ὅροι* con l'ufficio che noi oggigiorno, dominati da preoccupazioni critiche, attribuiamo alle *definizioni* della Matematica in generale e della Geometria in ispecie. Par lecito pensare che EUCLIDE negli *ὅροι* intendesse semplicemente di stabilire la nomenclatura geometrica (1), riserbando ai « postulati » e alle « nozioni comuni » quelle proprietà degli enti fondamentali, che dovevano essere immediatamente applicate nelle successive deduzioni. Così EUCLIDE, dopo avere enunciato la sua definizione di retta, *postula* che sia possibile il condurre da qualsivoglia punto a qualsivoglia punto una retta (*esistenza* di una retta per due punti) ed afferma, tra le *Nozioni comuni*, che due linee rette non comprendono spazio alcuno (*unicità* della retta per due punti distinti).

§ 2. — Le definizioni di retta che, accanto a quella euclidea, ebbero maggior fortuna nella scuola, si riattaccano tutte, quale più quale meno direttamente, al fatto geometrico fondamentale che *la retta è determinata da due suoi punti quali si vogliano.*

Possiamo ripetere col BOLZANO che ponendo due punti si mettono in evidenza due concetti o *predicati* : *distanza* e *direzione*.

Sul concetto primitivo di *distanza* che già vedemmo comparire nella interpretazione data da PROCLO della definizione euclidea, è fondata la definizione che caratterizza la retta come *la linea più*

(1) Riportiamo qui, desumendole dal SIMON (loc. cit., pag. 25), le seguenti parole del LAMBERT (*Briefe an Holland* [« Deutsch. Gelehrt », Briefwechsel I, Bd. IV)] : « Dass Euclid seine Definitionen vorausschickt und anhäuft, das ist gleichsam eine Nomenclatur. Er thut dabei weiter nichts, als was z. B. ein Uhrmacher oder anderer Künstler thut, wenn er anfängt seinem Lehrjungen die Namen seiner Werkzeuge bekannt zu machen ». Cfr. altresì : ZEUTHEN, *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Kopenhagen, 1896, pag. 115.

Digitized by Google

breve compresa fra due suoi punti quali si vogliano. Codesta definizione, che risale ad ARCHIMEDE (1), fu ripresa dal LEGENDRE (2), che precisamente definisce la *retta* come *il più corto cammino tra due punti.* Questa definizione ebbe il medesimo largo successo degli *Eléments de Géométrie.* Ma sono senz'altro manifesti i difetti che essa presenta, se non è associata ad un opportuno sistema di postulati, i quali determinando, indipendentemente dalla retta, il concetto di lunghezza, rendano possibile il confronto, rispetto alla lunghezza, di linee diverse e stabiliscano l'esistenza e l'unicità del *minimo.* Un siffatto sistema fu stabilito dal BETTAZZI (3), il quale, partendo, in sostanza, dalla nozione di *coppia di punti,* rigidamente connessa e invertibile, giunse a dare così al concetto del LEGENDRE una formulazione logica rigorosa.

Al secondo predicato della coppia di punti, cioè alla *direzione,* si riconnette la più antica definizione che oggidì si conosca, quella di PLATONE (4), che PROCLO, così enuncia: *ἡ τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιροοσθεῖ,* cioè, secondo la traduzione del BAROZZI: *Linea recta est cuius media obumbrant extrema.*

Ma l'idea di direzione trova la sua prima formulazione sistematica nella *Ausdehnungslehre* del GRASSMANN, sulle cui tracce essa fu poi ulteriormente elaborata dallo SCHLEGEL (5). Questi, dopo aver notata la infinita varietà di movimenti, che si possono imprimere ad un punto al principio della sua variazione di posizione, definisce la *direzione* come il contrassegno del movimento iniziale entro codesta molteplicità di movimenti possibili, e chiama *semplice* il movimento totale (finito) di un punto che continua nel

(1) *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. Opera,* ed. J. L. HEIBERG, I, Leipzig, 1888, p. 8. Cfr. P. DU BOIS REYMOND, « Math. Ann. », 15 (1879), pag. 283. Ma fu sostenuto che l'indicata proprietà non ha in ARCHIMEDE l'ufficio di definizione, bensì quello di postulato. Cfr. H. G. ZEUTHEN, « Archiv. für die Gesch. der Naturw. », Leipzig, 1909, 1, pag. 320; G. ENESTRÖM, « Bibl. math. » (3), 8 (1907-8), pag. 66; (3), 10 (1909-10), pag. 53.

(2) *Eléments de géométrie* (1re ed.), Paris, an II, pag. 1; (12me ed.), Paris, 1823, pag. 1.

(3) *Il concetto di lunghezza e la retta.* « Ann. di Mat. », serie 2a, t. 20, 1892.

(4) Nel *Παρμενίδης.* ed. DIDOT, 1, Paris, 1891, pag. 634: *οὗ ἂν τὸ μέσον ἀμφῶν τοῖν ἐσχάτοιν ἐπίπροσθεν ᾖ.* Questa stessa definizione è riprodotta da ARISTOTILE, cfr. J. L. HEIBERG, « Abh. Gesch. math. Wiss. », Leipzig, 18 (1904), pag. 7.

(5) *System der Raumlehre,* Leipzig, 1872.

Digitized by Google

suo movimento iniziale (cioè *un gruppo* ∞^1 *di traslazioni*). Dopo di ciò lo SCHLEGEL chiama *retta la traiettoria di un punto in un movimento semplice* (1).

A codesta definizione si può ravvicinare quella, che solitamente si attribuisce al LEIBNIZ, sebbene fosse già anteriormente nota (2), e che si riattacca essa pure al fatto fondamentale della determinazione della retta mediante due suoi punti, cioè la definizione, per cui la *retta* è considerata come la *linea che resta immobile quando si fa ruotare intorno a due suoi punti fissi* (3).

Tanto la definizione di GRASSMANN-SCHLEGEL, quanto quella del LEIBNIZ non possono manifestamente essere scelte a base di una formulazione logica della Geometria se non è prima caratterizzato, mediante un opportuno sistema di postulati l'insieme (*gruppo*) di movimenti. Un tale risultato non è certamente raggiunto dalle considerazioni, dianzi accennate, dello SCHLEGEL nell'ordine di idee del GRASSMANN (4), mentre invece un assetto logico rigoroso, in base alla definizione del LEIBNIZ, è stato assegnato dal PIERI (5).

§ 3. — Il succinto esame, che abbiamo così compiuto delle varie definizioni successivamente proposte per la retta, ci mostra come esse tutte (tolta, forse, la definizione assolutamente indeterminata di EUCLIDE) presuppongano altri concetti (*distanza*, *direzione*, *movimento*) che (si può notarlo subito) appaiono tutti meno evidenti e più complessi del concetto stesso di retta che si vuol definire Ad ogni modo, qualunque sia per essere il giudizio che su quest'ultimo punto si vorrà portare, è senz'altro messa in luce la necessità di caratterizzare con opportuni postulati o il concetto stesso di retta o altri concetti fondamentali, a cui quello si possa ricondurre.

(1) Per una esposizione critica più completa del sistema del GRASSMANN e dello SCHLEGEL rimandiamo all'opera del VERONESE, *Fondamenti di Geometria*, Padova, 1891, pagg. 600 e segg.

(2) Essa è già riportata in PROCLO: vedasi a pag. 110 della traduzione del BAROZZI.

(3) Il GAUSS ebbe a notare che di cotesta proprietà si fa uso quando mediante il teodolite, si vuol verificare un allineamento rettilineo.

(4) In quest'ordine di idee si veda anche DIXON, *The foundations of Geometry*, Cambridge, 1891.

(5) *Della Geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo.* « Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino », serie II, t. XLIX, 1899. Cfr. anche la più recente Memoria dello stesso autore citata nella nota (1) a pag. 89.

Digitized by Google

Di ciò avremo ad occuparci fra poco; prima per altro daremo un rapido sguardo alle varie definizioni di piano.

§ 4. Le definizioni del piano. — In generale il concetto di piano si riattacca a quello di retta. Così fa EUCLIDE che dopo aver definito la *superficie* come ciò che possiede soltanto lunghezza e larghezza (*Ἐπίφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει*) aggiunge: *Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.* Il che si suol tradurre: *Piano è la superficie che è posta egualmente rispetto alle sue rette.*

Si ritrovan qui la stessa oscurità e la stessa ambiguità, che si incontrano nella definizione euclidea di retta; e ci sembra inutile di indugiarci a esporre le varie possibili interpretazioni, poichè, in sostanza, esse rispecchiano, quasi una per una, quelle che abbiamo enumerato nel caso della retta. Importa soltanto notare che qui nasce una questione nuova, su cui tosto ci indugeremo, relativa alla moltitudine delle rette che la definizione presuppone giacenti sul piano.

Largo favore ottenne la definizione [che il CRELLE attribuisce a ROBERT SIMSON e che trovasi già fra le cosiddette « definizioni » attribuite ad ERONE (1)] per la quale il *piano è caratterizzato dalla proprietà di contenere per intero ogni retta di cui contenga due punti.*

Il GAUSS (2) osservò che questa definizione include un postulato (o un teorema), in quanto si ottiene già il piano, proiettandone una retta da un punto ad esso appartenente. Il CRELLE (3) propose di assumere a definizione di piano la costruzione or ora indicata, cercando poi di dimostrare per una parte, che la superficie ottenuta è indipendente dal punto e dalla retta, scelti a base della costruzione, e per l'altra, che una retta avente comuni con quello due punti vi giace per intero. Ma le deduzioni del CRELLE non sono rigorose e lasciano perciò insoluta la questione.

Se noi vogliamo esaminare quale sia il contenuto logico della asserzione che una retta avente comuni due punti con un piano vi giace per intero, e ci proponiamo, precisamente, di vedere da

(1) HERONIS, *Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae*, ed. F. HULTSCH, Berlin, 1864, pag. 10. Codesta definizione si trova anche in JCONE di Smirne (II sec. dell'E. V.). Cfr. *Expositio rerum mathematicarum*, ed. E. HILLER, Leipzig, 1878, pag. 112.

(2) Lettera al BESSEL, Göttingen, 27 luglio 1829.

(3) *Zur Theorie der Ebene.* « Crelle's Journal », XLV, 1845.

Digitized by Google

quali premesse codesta proposizione si possa far logicamente dipendere, dobbiamo anzitutto avvertire che non si ottiene l'intero piano, proiettando da un punto una retta non passante per esso, ma occorre aggiungere la parallela pel punto alla retta data. Ma ad eliminare dapprincipio codesta complicazione, in un certo senso accessoria, ci limiteremo a definire dapprima la regione piana che si ottiene proiettando da un punto un segmento (la cui retta non passi pel punto). E allora nasce il problema di determinare, su quali basi si possa dimostrare che codesta regione piana contiene per intero il segmento congiungente due quali si vogliano suoi punti.

A tale scopo non bastano le proprietà della retta relative all'ordinamento dei suoi punti e alla congruenza dei segmenti, neppure con l'aggiunta della determinazione della retta mediante due punti. Infatti l'Enriques nota che, assumendo come relazione di congruenza segmentaria quella di uguaglianza d'arco, si possono costruire sistemi di linee piane aperte, non terminate (tali quindi che valgano per esse le proprietà di ordinamento dei punti) e determinate da due loro punti generici, per le quali la proprietà suindicata non si verifica.

Risulta di qui, che, ove si voglia stabilire la proposizione fondamentale del piano, è necessario aggiungere alle suindicate premesse, relative all'ordinamento e alla congruenza segmentaria, qualche ulteriore affermazione, che si riattacchi ad altre proprietà della retta.

A questo proposito sono singolarmente interessanti le considerazioni del Veronese (1), il quale, per giungere alla dimostrazione della proposizione fondamentale del piano, presuppone, accanto ai caratteri di ordinamento e di continuità della retta e alle proprietà della congruenza segmentaria (o corrispondenza per uguaglianza fra due rette), quelle altresì della congruenza (o corrispondenza di uguaglianza) fra le coppie di rette incidenti (concepite, come ben si comprende, indipendentemente dal piano).

Precisamente egli stabilisce il seguente *postulato*: *Date due coppie di rette* ab, a'b' *di vertici* A, A', *e posta fra* a, a' ; b, b' *una delle due corrispondenze di eguaglianza che possono porsi facendo corri-*

(1) *Fondamenti di Geometria*, pag. 240. Cfr. anche Palatini, *I principî della Geometria esposti secondo il metodo del prof. Veronese.* « Giornale di Matematica », t. XLI (10° della 2ª serie), Napoli, 1904.

Digitized by Google

spondere A, A', *se il segmento che unisce due punti* E, F *di* a, b *è uguale al segmento che unisce i due punti corrispondenti* E', F', *lo stesso avviene per due qualsiansi segmenti che congiungono* E *ed* E' (*oppure* F *ed* F') *rispettivamente con due punti corrispondenti di* b, b' (a, a').

Oltre a ciò, il VERONESE, in quanto non si limita a considerare la regione piana, ma si propone senz'altro di definire l'intero piano, è condotto a dover considerare la parallela pel punto dato alla retta direttrice, e perciò tratta separatamente i tre casi, cui dànno luogo le varie possibili ipotesi circa l'esistenza e la molteplicità delle parallele per un punto a una retta prefissata.

Nel caso euclideo della parallela unica, che a noi più interessa, egli, data la necessità di definire la retta indipendentemente dal piano, si scosta dalla definizione tradizionale, e chiama parallele due rette *opposte* (cioè *simmetriche*) rispetto ad un punto. Dopo di che assume il postulato delle parallele sotto la forma seguente: *Due rette opposte rispetto ad un punto sono pure opposte rispetto al punto medio di ogni loro segmento trasversale* (1).

Allora, ammesso come ulteriore postulato che « *se in un triangolo due lati diventano infinitamente piccoli, anche il terzo lato diventa tale* » si dimostra, in base alla supposta continuità della retta, che « *se da un qualsiasi punto interno* (*o esterno*) *di un lato di un triangolo si conduce la parallela ad un altro lato, essa incontra il terzo lato del triangolo in un punto interno* (*o, rispettivamente esterno*) ».

Dopo di che si stabilisce agevolmente la proposizione fondamentale del piano, mostrando che *se una retta taglia due lati di un triangolo, essa o taglia anche il terzo o gli è parallela.*

Nel caso ellittico (o riemanniano) il VERONESE per dimostrare la proposizione fondamentale aggiunge una ipotesi ulteriore relativa all'indipendenza del campo finito intorno ad un punto (in un piano) dai campi infiniti e infinitesimi intorno ad esso (2). Mentre poi, per quel che riguarda il caso iperbolico o di LOBATSCHEFSKIJ, si limita a dimostrare indipendentemente dal piano alcune proprietà delle perpendicolari a una retta; ed è de-

(1) Veramente basta ammettere che « se due rette sono opposte rispetto ad un punto, preso un punto medio di un qualsiasi segmento trasversale, esistono sulle due rette due punti diversi dagli estremi di codesto segmento, i quali sono opposti rispetto al punto considerato ». Cfr. PALATINI, loc. cit., pag. 18.

(2) VERONESE, loc. cit., pag. 361.

Digitized by Google

gno di nota che il VERONESE in codeste proprietà, le quali sono comuni ai tre sistemi, vede una indicazione della via da tenere per costruire una dimostrazione della proposizione fondamentale del piano, indipendente dal postulato delle parallele, dimostrazione che egli afferma di ritenere possibile (1).

La quale affermazione, forse, non sembra sufficientemente giustificata dagli sviluppi dianzi accennati del VERONESE, in quanto non appaiono ben manifesti il contenuto e la portata della ipotesi, di cui egli si vale nel caso ellittico, mentre, per altra parte, nello stesso caso euclideo non pare senz'altro escluso che il postulato del VERONESE, relativo alle rette opposte rispetto ad un punto, possa contenere qualche cosa di più della pura e semplice ipotesi della unicità della parallela.

Ad ogni modo, sebbene non sia ancora detta l'ultima parola su questa interessante questione della dipendenza fra il postulato del piano e il postulato euclideo delle parallele, spetta al VERONESE il merito di aver fissato pel primo un sistema di premesse, da cui si può rigorosamente dedurre la proposizione fondamentale del piano.

§ 5. — Alla obbiezione sollevata dal GAUSS contro la definizione di piano suindicata, era ben naturale che taluno pensasse di ovviare, ricorrendo a un modo diverso di introdurre il piano.

Così già il CRELLE fece ricorso alla definizione (che egli attribuisce al FOURIER) per cui il piano è dato come l'*insieme delle rette ortogonali in un punto ad una retta data*; ma, aggiunge, che sebbene egli trovi codesta definizione preferibile alle altre, non è riuscito a stabilire in modo rigoroso i teoremi, dai quali essa dipende. Invero la nominata definizione presuppone la nozione di rette ortogonali, indipendentemente da quella di piano. A questa difficoltà si propose di ovviare il DEAHNA (2); egli, presupponendo stabilite le nozioni di retta e di sfera, ammette che in ogni movimento dello spazio, che lascia fermo un diametro della sfera, i punti di questa si muovano, descrivendo delle linee chiuse (circoli). Ciascuno di questi circoli, in ogni movimento dello spazio intorno al diametro prefissato, scorre su se stesso, e uno di essi divide la

(1) VERONESE, loc. cit., pag. 379.

(2) *Demonstratio theorematis, esse superficiem planam* ecc., Marburg, 1837.

Digitized by Google

sfera in due parti congrue. Dicesi allora *piano* l'insieme delle rette che dal centro della sfera proiettano i punti di questa circonferenza.

D'altro canto si può notare che, ove, sulle tracce del KILLING (1), si definisca l'angolo retto indipendentemente dal piano, la concezione del FOURIER può senz'altro ricevere una formulazione rigorosa.

§ 6. — Le definizioni ricordate sin qui fanno dipendere il concetto di piano da quello di retta. Ma altre ne furono proposte, le quali, inversamente, subordinano la nozione di retta a quella di piano.

Così il LEIBNIZ (2) considerò il *piano* come la *superficie che divide lo spazio in due parti congruenti* e la *retta* come la *linea che divide il piano in due parti congruenti.*

Queste definizioni richiedono che si assumano come nozioni primitive quelle di *punto* e di *equidistanza* e che si determinino, con un opportuno sistema di postulati, le *simmetrie* che esistono sulla retta, nel piano e nello spazio (3).

A codesta concezione del LEIBNIZ si possono riattaccare le definizioni di retta e piano, che fanno dipendere la generazione di codeste figure fondamentali dalla sfera e dal cerchio e che furono per la prima volta applicate sistematicamente dal BOLYAI e dal LOBATSCHEFSKIJ. In vista delle radicali modificazioni che siffatte definizioni implicano nell'assetto dei principî della Geo-

(1) *Einführung...*, II Bd., S. 183 u. ff.

(2) *Leibnitzens math. Schriften.*, G. J. GÉRHARDT, Berlin, 1845. Veramente la definizione or ora ricordata di retta si trova già, come mi fu comunicato dal prof. G. VAILATI, nella *Geometria empirica* di JOHACHIM JUNGIUS, il quale, anzi vi risponde anticipatamente all'obbiezione che fu sollevata da GIORDANO VITALE da Bitonto contro la definizione del LEIBNIZ; vale a dire all'obbiezione che anche altre linee diverse dalla retta (come la sinusoide) dividono in due parti il piano. J. JUNGIUS nota, in sostanza, che la retta è l'unica linea che divida il piano in due parti che possano sovrapporsi l'una all'altra tenendo fermo un punto della linea stessa. — Quanto alla disputa fra il LEIBNIZ e GIORDANO VITALE, si vedano le opere matematiche del primo.

(3) Cfr. BRODÉN, *On geometriens principien.* Sull'ufficio delle simmetrie nella dimostrazione della proposizione fondamentale del piano si veda ENRIQUES, *Sopra le superficie e le varietà a più dimensioni le cui geodetiche sono rappresentabili con equazioni lineari.* « Rendiconti della R. Accad. delle Sc. di Bologna », 1902-3.

Digitized by Google

metria elementare, e in ragione anche del particolare interesse storico e scientifico che è dovuto alle concezioni del BOLYAI e del LOBATSCHEFSKIJ, noi ci tratterremo nel seguente paragrafo ad abbozzare *sotto forma puramente intuitiva*, la serie di osservazioni, con le quali sulle tracce di codesti due Geometri si possono introdurre le forme *piano* e *retta* : e intanto noteremo che la concezione, di cui qui si fa parola, si fa risalire al LEIBNIZ (1).

§ 7. Sviluppi di Bolyai e Lobatschefskij. — Assumiamo come nozione primitiva quella di *coppia di punti, invariabilmente connessa ed invertibile*, quale è suscitata in noi dall'idea di coppie di punti (materiali) appartenenti a corpi sensibilmente rigidi : e sia stabilito in tutta la sua estensione il concetto della *congruenza*, come è dato dal *movimento* dei corpi rigidi.

Due coppie di punti AB, CD si diranno *congruenti*, quando esiste un movimento dello spazio che sovrappone A a C e B a D : esiste allora anche un movimento che sovrappone A a D e B a C. Si esprime lo stesso fatto, dicendo che la *distanza* di A e B è eguale alla *distanza* di C e D. In particolare si dice che due punti B e C sono *equidistanti* da un terzo punto A, se le coppie AB, AC sono congruenti.

Dati due punti O ed A, dicesi *sfera di centro* O *e passante per* A l'insieme dei punti M, tali che A ed M siano equidistanti da O. La coppia OA (od ogni altra coppia a quella congruente) dicesi anche *raggio* della sfera costrutta. In ogni movimento dello spazio che lascia fermo il punto O la sfera scorre su se stessa.

La sfera divide lo spazio in due regioni, l'una costituita di *punti esterni*, l'altra di *punti interni*, e tali che non si può passare con un tratto continuo da un punto interno ad uno esterno, o viceversa, senza attraversare, almeno in un punto, la sfera stessa. Dei *punti esterni* dicesi anche che hanno dal centro *distanza maggiore* del raggio ; dei *punti interni*, che hanno dal centro *distanza minore* del raggio.

Le sfere, che hanno un medesimo centro O, non possono avere a due a due punti comuni. Il loro insieme (*fascio*) è *ordinato* e *continuo*. Il primo di questi caratteri dipende dal fatto che, nel

(1) UYLENBRÖK, *Christiani Hugenii aliorumque saeculi XVI virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae*, Hagae, MDCCCXXXIII, fasc. II.

Digitized by Google

fascio, se una sfera S_1 è interna ad una sfera S e una terza sfera S_2 è interna ad S_1, si ha ancora che la S_2 è interna alla S; il secondo sta in relazione con la continuità dello spazio.

§ 8. — Due sfere S ed S', di centro O ed O' rispettivamente, e tali che la seconda abbia dei punti interni ed esterni alla prima, si intersecano in una linea *continua* e *chiusa* k, che dicesi *circolo*. In ogni movimento dello spazio, che lascia fermi i punti O ed O', il circolo scorre su se stesso; ed esistono due ben determinati movimenti, fra loro *inversi*, per ciascuno dei quali O ed O' restano fermi, ed ogni punto di k, dopo aver descritto l'intero circolo, ritorna nella posizione primitiva.

Se due sfere S, S' hanno due punti A, B in comune, si può passare da A a B per mezzo di due archi di curva, continui e appartenenti alle due sfere: cioè le due sfere si intersecano in un *circolo*, passante per A e per B.

Siano due *terne* ABC, $A'B'C'$, tali che le coppie AB, BC, CA che si possono formare coi punti della prima siano ordinatamente congruenti alle coppie $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, formate coi punti della seconda: *le due terne sono allora congruenti*. Si muova infatti la seconda terna nello spazio fino a far coincidere, come è possibile, A' con A e B' con B. Poichè, in questa nuova posizione, la coppia AC è congruente alla AC', e la BC alla BC', le sfere di centro A, B e raggio AC, BC rispettivamente passano anche per C', onde il circolo, loro comune intersezione, contiene i due punti C e C', ed è quindi possibile, con due diversi movimenti, sovrapporre C' a C, lasciando fermi A e B.

Assegnato sopra un circolo k un punto A, esiste su quello un punto B ed uno solo, tale che i due archi AB, in cui il cerchio resta così diviso, siano congruenti (1). Il punto B dicesi *opposto* di A su k.

§ 9. — Se due sfere S ed S' di centri O ed O' rispettivamente, si intersecano in un cerchio k, ciascuna di esse è da k divisa in due *regioni sferiche*, delle quali una è costituita di tutti punti interni, l'altra di tutti punti esterni rispetto all'altra sfera. Chiamiamo Z_1, Z_2 le due regioni, in cui S è divisa da k, o, come diremo le due *regioni* di S, relative a k, e siano la prima interna, la seconda

(1) Cfr. Art. Quinto.

Digitized by Google

esterna ad S'. Se S_1' è una sfera di centro O', distinta da S' e interna ad essa (o, come si può dire, di raggio minore) e la S_1' interseca S in un circolo k_1, questo circolo, dovendo essere costituito di tutti punti appartenenti ad S e interni ad S', apparterrà per intero alla regione Z_1. Se allora nel fascio delle sfere concentriche ad S' consideriamo l'insieme delle sfere intersecanti S, in relazione con l'ordine e la continuità di questo, risulta ordinato e continuo anche l'insieme (*fascio*) dei circoli, intersezioni di S con le sfere considerate. Esisterà allora nella regione Z_1 della sfera S un punto X ed uno solo *interno* a tutti i circoli del fascio considerato. La sfera Σ_1 di centro O' e passante per X non può aver comune con S un ulteriore punto, perchè in tal caso intersecherebbe S secondo un circolo passante per X e appartenente al fascio, di cui ciascun circolo deve, invece, contenere X al suo interno. Tutti i punti di Σ_1, distinti da X sono esterni ad S. Ogni sfera di centro O' ed interna a Σ_1, non ha con S alcun punto comune.

Analogamente si costruisce una sfera Σ_2 di centro O', maggiore di S' e avente in comune con S un punto Y ed uno solo: ogni punto di S, diverso da Y è interno a Σ_2: tutte le sfere di O' e maggiori di Σ_2 non hanno alcun punto comune con la S.

Le due sfere Σ_1, Σ_2 diconsi *tangenti* ad S: X e Y sono i rispettivi *punti di contatto*.

In ogni movimento dello spazio che lascia fermi i punti O ed O', restano fermi anche i punti X e Y: se, infatti, si muovessero, descriverebbero due circoli che dovrebbero essere comuni ad S e a Σ_1, ad S e a Σ_2 rispettivamente.

§ 10. — Siano dati nello spazio tre punti A, B e C. Se consideriamo l'insieme dei movimenti dello spazio che lasciano fermi i punti A e B, il punto C o rimane fermo in ciascuno di essi o in ciascuno di essi si muove su di un circolo k, intersezione delle due sfere di centro A, B e raggio AC, CB rispettivamente. *Escluso il primo caso*, ciascun movimento dell'insieme considerato fa descrivere ai singoli punti di k archi di circolo congruenti (e in uno stesso verso). Se quindi in un particolare movimento dello spazio, che lascia fermi A e B, anche il punto C sta fermo, codesto movimento farà descrivere un arco nullo a ciascun punto di k, cioè lascerà fermi tutti i singoli punti di codesto cerchio.

Ora vogliamo dimostrare, che il movimento, che lascia fermi

Digitized by Google

A, B e tutti i punti del cerchio k, si riduce al movimento *identico*, che lascia fermi tutti i punti dello spazio.

Consideriamo infatti la sfera S di centro A e passante per C: essa conterrà per intero il circolo k. Sulla S, in *ogni* movimento che lascia fermi A e B, restano fermi due punti X, Y (punti di contatto con S delle sfere di centro B e tangenti a quella), i quali cadono nelle due diverse regioni sferiche di S relative a k. Se h è il circolo intersezione con S di una sfera avente il centro in un punto H di k, questo ultimo circolo intersecherà h in due punti M, N. Nel movimento considerato, che lascia fermi A, B e tutti i punti di k (in particolare M ed N) o tutti i punti di h restano fermi o i due archi MN di h vengono scambiati fra loro. Se si verificasse quest'ultimo caso dovrebbero, nel movimento considerato, essere tra loro scambiate le due regioni di S, relative a k, e ciò non può accadere, giacchè ciascuno dei punti X, Y rimane fermo. Si conclude così che tutti i punti della sfera S restano fermi. Ma allora, considerata un'altra sfera qualsivoglia S', che abbia il suo centro in B e intersechi in un circolo h' la S, possiamo applicare ad S' lo stesso ragionamento applicato dianzi ad S e concluderne che anche tutti i punti di S' stanno fermi. Così, successivamente, si dimostra che nel movimento considerato restano fermi tutti i punti dello spazio, onde è lecito enunciare il seguente

Lemma — *Se in un particolare movimento* (non identico), *che lascia fermi due punti* A *e* B, *resta fermo un terzo punto* C, *questo punto resta fermo in ogni movimento, che lascia fermi* A *e* B.

§ 11. — Premesse queste osservazioni, fissiamo due punti O ed O' qualsivogliano dello spazio, e consideriamo la sfera S di centro O e passante per O' e la sfera S' di centro O' e passante per O.

Poichè S ha punti interni ad S', ed S' ad S, le due sfere si incontreranno in un certo circolo k: di più tutte le coppie di sfere S_1, S_1' di centro O ed O' rispettivamente e di raggio eguale, ma maggiore di OO', avranno a comune un circolo, giacchè ogni punto di S interno ad S' è pure interno ad S_1', e ogni punto di S' interno ad S è pure interno ad S_1'. Infine delle coppie di sfere di centro O ed O' e di raggi eguali, ma minori di OO', consideriamo quelle che hanno un circolo comune. Nei due fasci esisteranno due sfere Σ, Σ', di raggi eguali, tra loro tangenti, e tali che le sfere

Digitized by Google

dei due fasci interne a Σ e Σ', rispettivamente, non hanno alcun punto in comune.

Il sistema π di tutti i circoli così ottenuto (aggiuntovi il punto di contatto di Σ e Σ') dicesi *piano*: in altre parole *dicesi* **piano** il *luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti* (fondamentali).

Il *piano* divide lo spazio in due parti, delle quali la prima contiene quei punti che hanno da O una distanza minore che da O', la seconda i punti che hanno da O' una distanza minore che da O. Dall'una all'altra non si può passare con un tratto continuo, senza attraversare il piano.

Se muoviamo nello spazio l'insieme di tutte le sfere indicate dianzi, in modo che i punti O ed O' si scambino fra loro, il piano π vien sovrapposto a se stesso.

§ 12. — Dati due punti A e B, consideriamo le due sfere di centro A e B e raggio AB, BA rispettivamente; esse avranno a comune un certo circolo h: su h si prendano due punti P e Q *opposti*. Le terne APQ, BPQ, le cui coppie sono a due a due ordinatamente congruenti, saranno congruenti: quindi è possibile, tenendo fermi A, B, scambiare P e Q; ne discende che sul circolo k, intersezione delle due sfere di centri P e Q rispettivamente e passanti per A (e quindi per B), i due punti A e B sono *opposti*.

Si costruisca allora il piano, luogo dei punti equidistanti da P e Q, al quale apparterranno, in particolare, i punti A e B: indichiamo con π il sistema fondamentale di circoli del piano considerato. Dico che nel movimento, dianzi indicato, che lasciando fermi A e B, scambia P e Q, restano fermi su ciascun circolo di π due punti.

Infatti se è k' un circolo di π diverso da k ed M un suo punto, che nell'accennato movimento dello spazio non resti fermo, questo dopo il movimento sarà in M': se R ed S sono i due punti, che dividono per metà i due archi MM' di k', gli archi RM ed SM vengono dal movimento indicato sovrapposti a RM' ed SM' rispettivamente: dunque P e Q restano fermi. Resta fermo ancora il punto di contatto di Σ e Σ'. Esiste quindi, nel piano π considerato per A, B, una linea r, la quale passa per questi punti e *gode della proprietà che tutti i suoi punti restano fermi nel movimento che, lasciando fermi* A *e* B, inverte *il piano* π. Poichè siffatto movimento non è *identico*, risulta dal

Digitized by Google

LEMMA del n. 10, che i punti di r restano fermi *in ogni movimento dello spazio, che lascia fermi* A *e* B.

Ma osserviamo che il movimento, che, lasciando fermi A e B, inverte il piano π, scambia fra loro le due parti, in cui quel piano divide lo spazio: cioè scambia ogni punto giacente da quella parte di π dove cade P con un punto giacente dalla parte opposta. Ne discende che nel movimento considerato nessun punto dello spazio resta fermo fuori del piano π: onde si conclude che la linea r è il luogo dei punti dello spazio, che restano fermi in ogni movimento che lascia fermi A e B.

Il luogo dei punti dello spazio che restano fermi in ogni movimento, che lascia fermi due punti A *e* B, *dicesi* **retta** AB.

La *retta* in relazione col sistema dei due fasci risulta *ordinata in modo continuo:* si ha quindi che ogni punto della retta la divide in due parti, a ciascuna delle quali si dà nome di *semiretta* o *raggio*. Un raggio si designa, indicandone l'origine ed un punto.

La retta è determinata da due suoi punti qualsivogliano.

La retta AB, infatti, è definita come luogo dei punti che restano fermi in ogni movimento, che lascia fermi A e B. Fissato uno qualsivoglia dei movimenti soddisfacenti a codesta restrizione, in esso resterà fermo insieme con A e B un altro qualsiasi C dei punti della retta. Allora, poichè esiste un movimento che lascia fermo, insieme con A e C, anche B, avremo per il LEMMA, che in ogni movimento, che lascia fermi A e C, resta fermo anche il punto B. Se ne conclude che le rette BA, AC coincidono e, più in generale, che sussiste il teorema enunciato dianzi.

§ 13. — Diremo *coppia di raggi* l'insieme di due raggi uscenti da un punto O (*vertice della coppia*) e invariabilmente connessi. Due coppie di raggi ab, $a'b'$, si diranno congruenti, quando esiste un movimento dello spazio che permette di sovrapporre il vertice dell'una al vertice dell'altra e i due raggi dell'una rispettivamente ai due raggi dell'altra. Ammetteremo l'*invertibilità* della coppia.

Date due coppie *congruenti*, ab di vertice O, $a'b'$ di vertice O', se A, B, A', B' sono punti di a, b, a', b' rispettivamente, tali che le coppie di punti OA, OB siano congruenti ordinatamente ad $O'A'$, $O'B'$ si verifica col movimento che le due terne OAB, $O'A'B'$ sono congruenti e, quindi, sono congruenti le coppie di punti AB, $A'B'$ e le coppie di raggi AO, AB ed $A'O'$, $A'B'$; BO, BA e $B'O'$, $B'A'$.

Digitized by Google

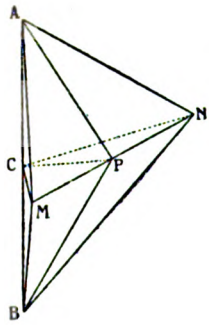
§ 14. — Dalla generazione del piano data al § 11 possiamo ora dedurne un'altra.

Definita nel piano π la retta r, il piano può immaginarsi generato da quella, nel movimento dello spazio che lasciando fermi i punti P e Q, sovrappone A a se stesso. In altre parole il piano può essere generato per mezzo della costruzione seguente: Dati un circolo e due punti A e B di esso, tra loro opposti, i punti C e D dividano per metà, rispettivamente, il segmento di retta AB e uno degli archi di cerchio AB. La semiretta CD, nel movimento dello spazio che lascia fermi i punti A, B e sovrappone a se stesso il circolo ADB, genera il *piano*. La retta AB dicesi *perpendicolare* nel punto C al piano.

La coppia di raggi CD, CB è in ogni posizione del raggio CD congruente alla coppia CD, CA: e, reciprocamente, se per C passa un raggio CE tale che la coppia CB, CE sia congruente alla coppia CA, CE, il raggio CE segna una delle posizioni successivamente assunte dal raggio CD nel suo movimento generatore del piano: quindi il raggio CD appartiene per intero al piano.

Dopo ciò, possiamo dimostrare agevolmente il teorema fondamentale del piano: *Una retta che ha in comune con un piano due punti, vi giace per intero.*

Sia r una retta avente in comune con un piano π due punti M, N. Considerata la perpendicolare a π in uno suo punto C qualsivoglia, siano A e B due punti di questa, giacenti da bande opposte del piano, e tali che AC sia congruente a CB. Se P è un qualsivoglia punto della retta MN, basterà far vedere che appartiene a π il raggio CP, o, ciò che è lo stesso, che la coppia di raggi CA, CP, è congruente alla coppia CB, CP. Perciò osserviamo che dalla congruenza delle terne ACM, BCM ed ACN, BCN risulta che AM, AN sono congruenti a BM, BN rispettivamente. Allora le due terne AMN, BMN, le cui coppie sono ordinatamente congruenti, sono congruenti ed hanno congruenti le coppie di raggi MA, MP ed MB, MP. Se ne conclude la congruenza delle terne AMP, BMP e quindi quella delle terne ACP, BCP: onde infine si ha che le coppie di raggi CA, CP e CB, CP sono congruenti, come appunto volevamo dimostrare.



Digitized by Google

Da questa proposizione fondamentale risulta che l'intero piano si ottiene assegnando due sue rette a e b, che si incontrino in un punto O, e proiettando i punti di a da un punto B (distinto da O) di b, e i punti di b da un punto A (distinto da O) di a.

Nella generazione di piano assegnata dapprincipio hanno un ufficio tutto particolare i punti fondamentali (centri dei due fasci di sfere). Qui vogliamo dare un cenno del modo, in cui si potrebbe dimostrare *la indipendenza della generazione del piano dai due punti fondamentali*. Siano P e Q i punti fondamentali per la costruzione di un piano π e sia k un circolo di π, intersezione di due sfere di raggi eguali e di centri P e Q rispettivamente. Scelto fuori di π un punto R qualsivoglia, dico che esiste un punto S, tale che, scelti a punti fondamentali R ed S, si ottiene, con la costruzione assegnata, precisamente il piano π. Se infatti A, B, C sono tre punti qualsivogliano di k, si può dimostrare che le tre sfere di centro A, B, C rispettivamente e passanti per R, si incontrano in un ulteriore punto S, unico e determinato. I punti A, B, C sono, ciascuno, equidistanti da R e da S: quindi appartengono al piano π', definito (come luogo dei punti equidistanti) da R e da S. Ma, per la proposizione fondamentale π' conterrà ancora le rette AB e BC e tutte le rette ottenute proiettando da A i punti di BC e da B i punti di AC. Ma codeste rette appartengono anche a π ed anzi, come abbiamo osservato, esse generano l'intero piano π. Dunque π e π' coincidono, e si può concludere che per ogni punto dello spazio fuori di un piano, esiste un altro punto (*simmetrico* di quello rispetto al piano), che si può assumere insieme col dato a punto fondamentale nella costruzione del piano.

§ 15. — Vogliamo da ultimo far vedere che *tre punti, non allineati appartengono ad un piano.*

Siano A, B, C i tre punti. Nel modo indicato sopra, costruisco per A e B un piano π: se il punto C non appartiene ad esso, consideriamo il simmetrico C' di C rispetto a π. Si può in due modi sovrapporre C' a C con un movimento dello spazio che lascia fermi A e B. In questi due movimenti il punto C descrive due archi di circolo, ciascuno dei quali, congiungendo due punti da bande opposte di π, lo incontra in un punto. Sia C_1 uno qualsivoglia dei due punti così ottenuti: poichè le terne ABC_1, ABC sono congruenti, è possibile con un movimento dello spazio, che lascia fermi A e B (*inverso* di uno di quelli considerati dianzi) sovrapporre C_1 a C.

Digitized by Google

Eseguendo codesto movimento su π, condurremo questo piano a passare, oltre che per A e B, anche per C.

L'*unicità* del piano passante per A, B, C discende dalla proposizione fondamentale del piano (1).

§ 16. Retta e piano in rapporto al gruppo dei movimenti. — Per meglio valutare e approfondire gli sviluppi precedenti giova considerare da un punto di vista più elevato il problema di definire retta e piano in rapporto ai « movimenti » dello spazio, ricorrendo alla considerazione che questi movimenti operano sui punti dello spazio stesso come le « *trasformazioni di un gruppo* ». Ciò significa che:

1) ogni movimento, dove si estenda all'intero spazio preso come rigido e si abbia riguardo soltanto al passaggio dalla posizione iniziale alla finale, può ritenersi come una trasformazione o corrispondenza puntuale;

2) eseguendo successivamente, nello spazio, due movimenti si dà origine ad una *trasformazione-prodotto* che è pure un movimento;

3) la trasformazione *inversa* di un movimento è pure un movimento.

Ora i gruppi di trasformazioni e in ispecie i *gruppi continui*, fra i quali rientra il gruppo dei movimenti, sono divenuti oggetto d'una teoria ampiamente sviluppata da Sophus Lie, al lume della quale le questioni di cui sopra si è discorso riescono notevolmente chiarite.

Qui appare che, negli sviluppi di Bolyai e Lobatschefskij viene assunta come principio la proprietà relativa al gruppo dei movimenti che « ogni coppia di punti possiede un *invariante* (distanza) »: è appunto da questa proprietà che si trae anzitutto la definizione della sfera, e quindi quella del piano e della retta.

(1) Alle concezioni di Bolyai e Lobatschefskij è anche ispirato, in parte, l'*Essai sur les principes fond. de la géométrie et de la méc.*, Bordeaux, 1879 del de Tilly; e si devono qui ricordare anche *I nuovi fondamenti di Geometria* (« Giorn. di Battaglini », vol. XX, 1881) del Cassani, il quale definisce la retta come luogo dei punti equidistanti dai tre punti di una *terna regolare* (equilatera) e il piano come superficie generata da « una retta che si muova intorno a un punto sopra un circolo, appoggiandosi sempre al medesimo ».

Digitized by Google

Ora si possono cercare altre definizioni della retta e del piano rispetto al gruppo dei movimenti.

Anzitutto si può pensare alla proprietà delle rette di essere *traiettorie di gruppi* ∞^1 di movimenti contenuti in quel gruppo ∞^6: ma questa proprietà, a cui in altra forma ci conduceva un'interpretazione della definizione euclidea sopra criticata, non basta a definire la retta. Giacchè il gruppo dei movimenti dello spazio contiene entro di sè tre specie di sottogruppi ∞^1, le cui traiettorie sono: rette o circoli o eliche.

La dimostrazione dell'asserto si compie, assai semplicemente nell'ordine d'idee della Geometria proiettiva, ricordando (1) che ogni movimento dello spazio, avuto riguardo soltanto alla posizione iniziale e a quella finale (fra cui pone una congruenza diretta), è un *moto elicoidale* intorno ad un determinato asse, e che questo moto può, in condizioni speciali ridursi ad una semplice *rotazione* (congruenza diretta-assiale) o ad una *traslazione* (congruenza diretta omologica). Tutto ciò vale in particolare per ogni moto infinitesimo, cioè per ogni moto in cui per ciascun punto dello spazio sia infinitamente piccola la distanza fra la posizione iniziale e la posizione finale. Se allora si introduce il concetto di *gruppo* ∞^1 (o ad 1 parametro) di movimenti, cioè il concetto di moto *continuo* generato per iterazione indefinita di un dato moto infinitesimo, si desume dal teorema or ora ricordato, che ogni gruppo siffatto è un *moto continuo elicoidale* (di determinato asse e di determinato passo), che, in particolare, può ridursi ad una *rotazione continua* intorno ad un asse fisso) o ad una *traslazione continua* (in una direzione fissa).

Le traiettorie dei singoli punti dello spazio (fuori dell'asse) in un tal gruppo ∞^1 di movimenti sono *eliche* o, rispettivamente, *circonferenze* o *rette*; talchè si può dire che *la retta e l'elica hanno comuni tutti i caratteri che si connettono alla proprietà di costituire traiettorie aperte di gruppi* ∞^1 *di movimenti.*

Per trovare una differenza caratteristica della retta in confronto all'elica conviene dunque ricorrere all'osservazione che la retta — e non così l'elica — resta invariante, oltrechè per gli ∞^1 movimenti (traslatorî) di cui è traiettoria, anche per un gruppo ∞^1 di rotazioni, che sono appunto quelle cui fanno appello gli sviluppi di Bolyai e Lobatschefskij, sopra esaminati. Pertanto la defi-

(1) Cfr. Enriques, *Lezioni di Geometria proiettiva*, 4ª ed., Bologna, Zanichelli, 1920, pag. 403.

Digitized by Google

nizione della retta, rispetto al gruppo dei movimenti dello spazio, resulta dalla proprietà di essere invarianti, non solo per ∞^1, ma per ∞^2 trasformazioni del gruppo (le quali sono i movimenti elicoidali composti delle traslazioni e delle rotazioni nominate innanzi).

§ 17. — Ora, passando dalla retta al piano, si presenta la domanda di caratterizzare questa superficie per mezzo dei movimenti che la lasciano invariata.

Qui appare anzitutto che il piano viene trasformato in se stesso da ∞^3 movimenti (formanti un gruppo) che sono le rotazioni dello spazio attorno ad assi perpendicolari e — come trasformazioni-limiti — le ∞^2 traslazioni parallele al piano medesimo.

Quali sono in generale le superficie trasformate in sè da serie continue (gruppi) di movimenti? La risposta è che tali superficie appartengono alla famiglia degli *elicoidi*, i quali si possono definire mediante il movimento elicoidale di una linea qualsiasi: vale a dire, facendo movere la linea generatrice nei movimenti elicoidali di un gruppo continuo ∞^1, in guisa che i suoi punti descrivano eliche traiettorie parallele. Ma gli elicoidi corrispondenti al caso generale della generazione precedente, sono trasformati in sè soltanto da ∞^1 movimenti.

§ 18. — Cerchiamo le superficie F trasformate in sè da almeno ∞^2 movimenti, per le quali dunque sia possibile di portare un punto A, in un altro punto qualsiasi A', con un movimento sovrapponente a se medesima la F. Queste superficie, che rientrano nella nota classe delle superficie con ∞^2 trasformazioni proiettive (1), si lasciano facilmente determinare come segue.

Si osservi che i movimenti trasformanti in sè una data superficie F, sono trasformazioni proiettive che lasciano fermo il circolo immaginario all'infinito delle sfere, che designeremo con C. Ora, in relazione alle proiettività subordinate da G su questo circolo e quindi nel piano all'infinito, si possono distinguere i seguenti casi:

1) I movimenti di G lasciano fermi tutti i punti di C. Ne

(1) Cfr. F. Enriques, *Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in se stesse.* « Memorie dell' Istituto Veneto di Scienze e Lettere », 1893; S. Lie–F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. III, pag. 180.

Digitized by Google

segue che essi lasciano pur fermi tutti i punti del piano all'infinito, ossia che si riducono a traslazioni dello spazio. Per conseguenza la superficie F, che è trasformata in sè da ∞^2 traslazioni, è necessariamente un piano.

2) I movimenti di G subordinano su C soltanto ∞^1 proiettività, formanti un gruppo e perciò dotate di due punti uniti fissi, che — per la realità — dovranno essere immaginari coniugati. Ciò importa che vi sia un fascio di piani paralleli trasformato in se stesso dai movimenti di G, ed inoltre che il G contenga entro di sè un sottogruppo ∞^1 di traslazioni che subordinano su C e nel piano all'infinito la proiettività identica. Si deduce che la superficie F sega i piani paralleli del fascio anzidetto secondo circoli (traiettorie di gruppi ∞^1 di movimenti del piano), e d'altra parte contiene ∞^1 rette che sono le traiettorie delle sopra nominate traslazioni: in conclusione la F è un cilindro e — come è facile vedere — un cilindro circolare, superficie che è effettivamente trasformata in sè da un gruppo ∞^2 di movimenti elicoidali, col medesimo asse.

3) I movimenti di G subordinano sopra C proiettività con punti uniti diversi chè — per la realità — non può esservi un solo punto unito comune. Allora queste proiettività generano per moltiplicazione un gruppo ∞^3, e quindi ∞^3 deve essere anche il gruppo G.

Segue da ciò che, fissando un punto sopra F, resta determinato un gruppo ∞^1 di rotazioni dello spazio che sovrappongono F a se stessa, e quindi la F, che appare in infiniti modi diversi come superficie di rotazione (non essendo un piano) deve essere una sfera.

Riassumendo: *le superficie che sono trasformate in sè da almeno ∞^2 movimenti dello spazio sono soltanto i piani, le sfere e i cilindri circolari.* Piani e sfere si distinguono fra queste per ammettere un gruppo di movimenti ∞^3.

Se si vuol distinguere, in quest'ordine d'idee il piano dalla sfera bisogna ricorrere alla proprietà della sfera di essere superficie chiusa anzichè aperta come il piano, ovvero investigare più profondamente le proprietà dei corrispondenti gruppi ∞^3 di movimenti.

Qui basta osservare che il gruppo dei movimenti che lasciano fermo un piano contiene entro di sè un sottogruppo ∞^2 di trasformazioni *permutabili*, che è costituito dalle traslazioni parallele al

Digitized by Google

piano. Invece fra i movimenti che lasciano ferma una sfera (e che sono sempre rotazioni attorno ad assi passanti per il centro) non accade di trovare ∞^2 trasformazioni permutabili, poichè la condizione di permutabilità (il prodotto indipendente dall'ordine di composizione) porta che si tratti di rotazioni col medesimo asse o con assi ortogonali, dimodochè i più ampi gruppi di rotazioni permutabili che lascino ferma una sfera (ovvero il suo centro) sono i gruppi continui ∞^1 costituiti dalle rotazioni attorno ad un asse, o i gruppi *misti* della medesima dimensione che li contengono (un gruppo di tale natura comprende — oltre a tutte le rotazioni attorno ad un asse r — anche le rotazioni di due angoli retti attorno agli assi perpendicolari ad r).

Dunque il piano può essere definito come « superficie trasformata in se stessa da ∞^2 movimenti a due a due permutabili » (bene inteso da chi presupponga o determini mediante convenienti postulati il concetto più generale della superficie).

§ 19. — Ora, per chi ricorra alla nozione che qui figura dei movimenti permutabili, che sono le traslazioni dello spazio, gli sviluppi occorrenti per definire retta e piano diventano particolarmente semplici. Ma giova dire che a tale nozione non potevano ricorrere Bolyai e Lobatschefskij, poichè scopo precipuo della loro critica era appunto di vedere fino a che punto possa edificarsi la geometria prescindendo dal postulato euclideo delle parallele, che viene affermato, in altra forma, da chi ammetta l'esistenza di moti traslatorî, cioè di gruppi ∞^1 le cui traiettorie siano rette.

Diciamo in breve come si presenti l'introduzione della retta e del piano nella *geometria delle traslazioni*.

Occorre postulare che nel gruppo ∞^6 dei movimenti dello spazio vi è un sottogruppo ∞^3 di movimenti a due a due permutabili, cui si darà il nome di *traslazioni*. E questo gruppo potrà essere caratterizzato ammettendo che « esiste una e una sola traslazione dello spazio che porta un punto, A, in un altro punto qualsiasi, A' ». Allora le condizioni di continuità che sono presupposte nella teoria generale dei gruppi di trasformazioni secondo il Lie, conducono a dimostrare che « una qualsiasi traslazione appartiene ad un gruppo ∞^1 » le cui traiettorie si definiranno come « rette ». Dopo ciò, moltiplicando due gruppi ∞^1 di traslazioni (che sono tutte, le une colle altre, permutabili) si darà luogo ad un gruppo ∞^2 di traslazioni, che porterà un punto qualsiasi

Digitized by Google

dello spazio in una superficie invariante: la quale potrà essere definita come « piano ».

Interessa osservare come venga qui superata la difficoltà relativa alla proprietà fondamentale del piano, di contenere ∞^2 rette. La traslazione parallela di una retta a (secondo una diversa direzione, b), genera una superficie σ che contiene due fasci di rette parallele: le traiettorie dei punti di a e le successive posizioni di a, le quali risultano traiettorie d'un altro gruppo ∞^1 di traslazioni rispetto a cui σ è invariante. E poichè σ riesce pure invariante per le ∞^2 traslazioni ottenute moltiplicando i due gruppi, esso conterrà le ∞^2 rette che ne sono le traiettorie. Tale osservazione permette di dimostrare la proprietà fondamentale del piano, sopra ricordata, perchè si può costruire il piano che contiene una retta a ed un punto B fuori di essa, mercè le traslazioni che portano un punto A della retta a nei punti della retta $b = AB$.

Ma, senza spingere più avanti questo esame dei concetti di retta e piano dal punto di vista della teoria dei gruppi di trasformazioni, ritorneremo alla critica elementare da cui ci siamo alquanto allontanati.

II.

§ 20. **Postulati di appartenenza.** — Nei paragrafi precedenti abbiamo passato in rassegna le principali definizioni successivamente proposte, dai geometri greci in poi, per le forme fondamentali *retta* e *piano*; e per ciascuna di codeste definizioni abbiamo indagato quali altri concetti, implicitamente o esplicitamente, esigesse posti in antecedenza e indipendentemente dai concetti medesimi di retta e piano che si volevano definire.

Da questo punto di vista noi non abbiamo con ciò se non constatato, caso per caso, la impossibilità di risalire indefinitamente nel processo di riduzione logica dei concetti geometrici a concetti via via più semplici.

Come già dicemmo dapprincipio questa veduta, pur tanto ovvia da apparire evidente *a priori*, non si affermò nettamente, nell'ordine storico, se non in tempi relativamente vicini a noi; e si può riattaccare direttamente all'inizio di quel movimento critico, che, determinatosi nella prima metà del secolo scorso col

Digitized by Google

sorgere delle *Geometrie non euclidee*, si allargò mano mano, dalle indagini sui fondamenti della Geometria, fino ad involgere i più elevati problemi della Teoria della Conoscenza e della Logica pura.

In base alla accennata veduta noi dovremmo fin d'ora procedere alla indagine comparativa e alla critica dei *concetti primitivi* (che, cioè, si assumono senza ridurne la definizione ad altri più semplici) e dei *postulati* o proposizioni fondamentali (che cioè non vengono dimostrate per mezzo di altre proposizioni più elementari).

Ma se volessimo intraprendere questa indagine, proseguendo, anche solo in via storica il determinarsi dei vari indirizzi critici nel quadro generale delle moderne ricerche sui principî della Geometria, ci dilungheremmo troppo dal modesto programma elementare, che, con intendimenti prevalentemente didattici, qui ci siamo prefissi. Una trattazione ampia e completa si ricerchi altrove (1). Qui noi ci limiteremo ad esporre in forma rapida ed evitando sviluppi logici troppo sottili, i principî di quegli indirizzi geometrici, che ci sono sembrati non soltanto più notevoli in se stessi, ma anche più consentanei alle esigenze didattiche di uno svolgimento elementare della Geometria.

§ 21. — Nella scelta dei concetti primitivi, anche quando non si voglia scostarsi dall'assetto tradizionale della Geometria, vi è una certa arbitrarietà; ma, dal punto di vista della convenienza didattica e fors'anche sotto il rispetto psicologico della genesi intuitiva dei concetti geometrici, conviene assumere senz'altro come concetti primitivi il *punto*, la *retta* e il *piano*; ed è a questo partito che noi qui ci appiglieremo.

Pertanto, movendo dal primo concetto fondamentale di *punto* (concetto capace di varie determinazioni il cui insieme costituisce lo *spazio*), si assumeranno senza definizione i concetti di alcune *particolari classi di punti*, subordinate, che si denominano *piano* e *retta*, ammettendo anzitutto che la retta contenga più punti e il piano punti fuori d'una retta e lo spazio punti fuori d'un piano. A codesti enti si attribuiranno, le seguenti *proprietà di*

(1) Si veda in particolare l'art. cit. di F. Enriques nella *Encyklopädie* ecc. E per ciò che riguarda il problema più precisamente logico, vedasi il recente volume dello stesso Autore, *Per la storia della Logica*, Bologna, 1922.

Digitized by Google

appartenenza (*Verknüpfungsaxiome* o *assiomi di collegamento* dello HILBERT):

I. *Due punti appartengono ad una retta e ad una sola.*

II. *Tre punti, non in linea retta appartengono ad un piano ben determinato.*

III. *Un piano contiene la retta determinata da due qualsivogliano dei suoi punti.*

A questi postulati reca un essenziale complemento il cosiddetto

POSTULATO DELLE PARALLELE: *Per un punto, fuori di una retta* r, *vi è una e una sola retta giacente con* r *in un piano e non avente con essa punti comuni*: che formula come un semplice rapporto di appartenenza il principio contenuto nel post. V dell'EUCLIDE.

Ma di tale postulato (da cui sono pure indipendenti le prime 27 proposizioni euclidee) non faremo uso qui; e ci limitiamo a rilevare che esso assume un particolare significato nello sviluppo storico della critica geometrica, come lo studioso apprenderà dall'articolo del BONOLA che fa parte di questa stessa raccolta.

Ora a costituire la Geometria in sistema logico deduttivo non bastano i precedenti postulati: è necessario postulare ancora le prime proprietà *lineari* della retta e *superficiali* del piano, relative alle loro divisioni in parti: in altre parole, è necessario richiedere per postulati le proprietà della *retta* e del *piano*, che si riattaccano ai concetti di *segmento* ed *angolo*; e così pure quelle proprietà delle divisioni in parti dello spazio, che son legate al concetto del *diedro*.

Di codeste proprietà, che generalmente nei trattati di Geometria elementare sono desunte dalla intuizione e applicate tacitamente, ci occuperemo nei paragrafi che seguono.

Si avrebbe poi un terzo gruppo di proprietà geometriche legate al concetto della *congruenza* o del *movimento* (*proprietà metriche*), ma di queste non ci occuperemo, rimandando all'Articolo Terzo. Ci limiteremo pertanto a mettere in luce quelle proprietà (*grafiche*) della retta e del piano (del segmento, dell'angolo e del diedro) che molto opportunamente possono introdursi prima di ogni nozione di congruenza.

§ 22. **Proprietà lineari della retta.** — Le proprietà *segmentarie* rientrano in quella categoria di proprietà, che l'intuizione attribuisce alla retta considerata in se stessa, astrazion fatta, cioè, da ogni relazione della retta medesima con lo spazio este-

Digitized by Google

riore: sono quindi proprietà, che la retta ha comuni con tutte le linee intuitive, *aperte* e *non terminate*.

Codeste proprietà possono essere introdotte nel sistema geometrico in due modi ben distinti, ma tra loro equivalenti.

In primo luogo possiamo riferirci alla generazione della retta per mezzo di un punto mobile. Siamo allora condotti a postulare le proprietà inerenti agli *ordini naturali*, in cui vengono disposti i punti della retta. Siffatte proprietà sono logicamente formulate nel seguente postulato:

IV *a*. *I punti della retta sono disposti secondo due* ordini naturali *o* versi, *opposti l'uno dell'altro* (*che si ottengono l'uno dall'altro scambiando le parole* « precede » *e* « consegue ») *per modo che*:

α) *Dati due punti* A, B, *uno di essi* precede *l'altro, il quale allora* consegue *al primo*.

β) *Se* A precede B, *e* B precede C, A precede C.

γ) *Se* A precede B, *vi è qualche punto* conseguente *ad* A *e* precedente *a* B.

δ) *Non esiste alcun* primo *punto* (*precedente a tutti gli altri*), *nè alcun* ultimo.

Le proposizioni *α*) e *β*) spettano alla retta in quanto è linea *aperta* e illimitata; la *γ*) stabilisce che tra due punti A e B qualsiansi della retta ve ne sono altri, distinti da A e B; onde risulta poi che codesti punti *intermedi* sono in numero infinito.

Dati due punti A, B, resta determinato sulla retta AB un verso, cioè il verso in cui B segue A e che si può indicare con $\overrightarrow{AB}$. Il verso $\overrightarrow{BA}$ è l'*opposto* di $\overrightarrow{AB}$.

§ 23. — Preso sulla retta un punto A e fissato su di essa un verso, i punti che in codesto verso precedono A e quelli che seguono A costituiscono rispettivamente i due *raggi* della retta aventi l'*origine* A, ossia le due *parti*, in cui la retta è divisa da A. Per determinare una di codeste parti basta assegnare un punto B di essa, diverso dall'origine, e allora essa potrà designarsi con « raggio AB ». Dati due punti A, B, si definisce il *segmento* AB come l'*insieme dei punti della retta che sono fra* A *e* B, cioè dei punti, che in uno qualsivoglia dei due ordini naturali conseguono all'uno e precedono l'altro dei due punti A e B. L'unicità dell'ente, che è così definito in doppio modo, corrispondentemente ai due ordini della retta, è stabilita dal postulato premesso. I punti del

Digitized by Google

segmento vengono così disposti in due *ordini naturali*, l'uno inverso dell'altro, e questi ordini hanno ciascuno un primo ed un ultimo elemento (*estremi del segmento*).

In base al postulato IV*a* si dimostra che *il segmento* AB *è costituito dai punti comuni al raggio* AB *e al raggio* BA, e si deducono i criteri che permettono di decidere se due segmenti *AB*, *CD* di una stessa retta abbiano o no una parte comune. Si dimostra cioè:

1) *Se il segmento* AB *contiene i punti* C, D, *ogni punto interno a* CD *è interno ad* AB.

2) *Se i punti* C, D *sono l'uno interno e l'altro esterno al segmento* AB, *i due segmenti* AB, CD *contengono un segmento comune.*

3) *Se i punti* C, D *della retta* AB *sono esterni al segmento* AB, *i due segmenti* AB, CD *non hanno punti comuni, oppure il segmento* CD *contiene* AB.

NOTA. A completare le proprietà degli ordini naturali della retta occorre aggiungere il *postulato della continuità* (cfr. Articolo Quinto).

§ 24. — Ma anzichè considerare la retta *geneticamente*, noi possiamo, in secondo luogo, riguardarla nel suo aspetto *attuale*; ed allora come base intuitiva delle sue proprietà segmentarie si presenta la *divisione in parti*.

Seguendo questo concetto, codeste proprietà si possono postulare sotto la forma seguente:

IV*b*. *a*) *Un qualsivoglia punto* A *di una retta* r *la divide in* due parti (*classi di punti*), *dette anche* semirette *o* raggi, *per modo che ogni punto diverso da* A *appartiene ad* una *delle due parti.*

β) *A ciascuna delle nominate parti appartengono punti.*

γ) *Siano* A *e* B *due punti qualsiansi della retta* r: *delle due parti, in cui essa è divisa da* B, *quella che contiene* A *contiene tutti i punti che sono dalla parte di* A *opposta a* B *e altri punti ancora.*

La possibilità che la retta sia una *linea chiusa* o *avente termini* è qui esclusa dalle proposizioni *a*) e *β*): la proposizione *γ*) determina quale relazione intercede fra tutte le possibili divisioni in parti della retta, che sono date dai singoli punti di essa: più precisamente ancora stabilisce che tra due punti *A* e *B* qualsivogliano della retta *r* esistono su questa altri punti distinti da *A* e *B* (in numero infinito).

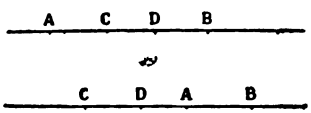
Il *segmento AB* si definirà allora come *l'insieme dei punti*

Digitized by Google

comuni alla parte relativa ad A, *che contiene* B, *e alla parte relativa a* B, *che contiene* A.

§ 25. — In base a questa definizione e al postulato IV*b* si stabiliscono anche qui i criterî, enunciati al § 23, relativi agli eventuali punti comuni a due segmenti di una stessa retta.

E d'altro canto è pur facile stabilire, partendo dal postulato IV*b*, l'esistenza sulla retta dei due ordini naturali.



Si fissino invero su di essa due punti A, B (distinti) e si convenga di dire che:

1° A *precede* B (*e* B *segue* A);

2° Tutti i punti del raggio AB (eccettuato A) *seguono* A e tutti gli altri punti (fuori di A) *precedono* A;

3° Ogni punto precedente A precede anche ogni punto che segue A;

4° Se due punti C, D seguono A, D segue C se A e D sono da parti opposte rispetto a C; e se C, D precedono A, D segue C se A e D sono rispetto a C dalla stessa parte.

Rimane così determinato sulla retta un *ordinamento* (secondo il verso AB), e il postulato IV*b* permette di dimostrare che esso resta inalterato se, anzichè dai due punti A, B, si parte rispettivamente da due punti C, D, tali che rispetto alle convenzioni stabilite, C preceda D. Se invece in codeste convenzioni si scambia l'ufficio di A con quello di B si ottiene sulla retta l'ordinamento secondo il verso $\overrightarrow{BA}$, *opposto* di $\overrightarrow{AB}$.

Dopo ciò e tenuto conto delle considerazioni del § 25, possiamo concludere che *i due postulati* IV*a* e IV*b* *sono fra loro equivalenti*, in quanto ciascuno di essi si deduce logicamente dall'altro.

§ 26. Nota. — I due postulati IV*a* e IV*b* caratterizzano ciascuno le proprietà segmentarie delle linee *aperte* (e prive di punti doppi).

Non sarà, forse, inutile l'accennare qui come si modifichino codeste proprietà nel caso delle *linee chiuse*.

Se, anzitutto, adottiamo il punto di vista *genetico*, abbiamo ancora fra i punti di una linea chiusa una *disposizione ciclica naturale* avente due *versi*, l'uno opposto dell'altro.

Digitized by Google

Ma per determinare uno di codesti due versi non bastano più due punti bensì ne occorrono tre (in una determinata disposizione). Risulta di qui che due punti A, B non definiscono un segmento della linea, ma la dividono in due segmenti (complementari), che insieme costituiscono l'intera linea. Per individuare uno dei due segmenti AB sarà necessario assegnare un terzo punto C, *interno* al segmento (distinto dagli estremi) (1).

Se in secondo luogo si sceglie il punto di vista *attuale*, si debbono prendere ancora le mosse dal concetto di *coppie di punti che si separano*; e come fu messo in luce dal VAILATI (2), le proprietà di ordinamento delle linee chiuse sono caratterizzate dai seguenti postulati:

1° *Se su di una linea chiusa si separano le due coppie di punti* AB, CD, *si separano altresì le coppie* CD, AB *e* AB, DC, *mentre le coppie* AC, BD *non si separano.*

2° *Dati quattro punti* A, B, C, D *si verifica necessariamente uno ed uno solo dei tre casi seguenti*: *a*) A, B *separano* C, D; *b*) A, C *separano* B, D; *c*) A, D *separano* B, C.

3° *Se* A, B *separano* C, D *e* A, C *separano* B, E, *allora* A, C *separano* D, E.

§ 27. **Proprietà superficiali del piano.** — Le prime proprietà *superficiali* del piano si riattaccano al concetto di *angolo*. Delle definizioni successivamente proposte per l'*angolo* e delle discussioni che ne derivano si troverà un'ampia e diligente rassegna nel II volume della *Planimetria comparata* dello SCHOTTEN (3). Io qui mi limiterò ad osservare, con lo SCHOTTEN stesso (loc. cit., pag. 99) che le definizioni di *angolo* si possono classificare in tre gruppi:

1° *Angolo è la differenza di direzione delle rette.* A questa definizione si può ravvicinare quella di EUCLIDE, per cui *l'angolo*

(1) Cfr. ENRIQUES, *Sui fondamenti della Geometria proiettiva.* « Rendic. Ist. Lombardo », 1894. Si vedano anche, dello stesso Autore, le *Lezioni di Geometria proiettiva*, Bologna, Zanichelli.

(2) *Sulle relazioni tra punti di una linea chiusa.* « Rivista di Matematica », vol. V, 1895, pag. 75. *Sulle proprietà caratteristiche delle varietà a una dimensione.* « Ibidem », pag. 183.

(3) Cfr. anche la *Zeitschrift für math. Unterricht* dello HOFFMANN, 1889-90 e una Nota dell'Appendice ai *Fondamenti ecc.* del VERONESE.

Digitized by Google

è l'inclinazione mutua di due linee nel piano che si incontrano e non sono poste sulla medesima retta.

2° *L'angolo è la grandezza (o la misura) della rotazione di un lato sull'altro nel piano.*

3° *Angolo è la parte di piano racchiusa da due raggi uscenti da un punto.*

Le definizioni del primo gruppo sono vere tautologie in quanto suppongono già, in certo modo, come primitivo il concetto di angolo.

Quelle del secondo gruppo si basano sopra l'idea della rotazione di una retta o d'un raggio del piano attorno ad un punto, idea che logicamente formulata, può condurre ad una conveniente introduzione dell'angolo.

Importa tuttavia di separare in essa quanto vi è di grafico, cioè di indipendente dal concetto della congruenza, facendo scaturire prima la nozione di angolo per venire poi (subordinatamente) alla nozione di *angoli uguali* (Art. Terzo).

A questo requisito, di non includere concetti metrici, soddisfano le definizioni del 3° gruppo sopra menzionato; ma esse, come giustamente nota il VERONESE, non corrispondono interamente al concetto intuitivo dell'*angolo*. Quando si dànno due raggi a, b, uscenti da un punto O, si definiscono due figure geometriche distinte: 1ª la parte di piano *limitata* dai due raggi, o insieme (a *due* dimensioni) dei punti che giacciono fra a e b; 2ª la parte del fascio di raggi di centro O, che è *limitata* da a e b o insieme (ad *una* dimensione) dei raggi uscenti da O e compresi fra a e b.

Ora il nostro concetto intuitivo di angolo si identifica piuttosto con quest'ultimo ente ad una dimensione, che non con la regione piana compresa fra i due raggi, la quale ad evitare confusioni, si potrà designare, col VERONESE, sotto il nome di *settore angolare o regione* (piana) *angolare*.

§ 28. — Volendo ora indicare le principali vie che conducono ad una formulazione logica delle prime proprietà superficiali del piano da cui scaturisca una definizione dell'angolo, possiamo distinguere (come per le proprietà lineari della retta) due punti di vista:

1° un punto di vista *genetico*;

2° un punto di vista *attuale*.

Digitized by Google

Il primo punto di vista muove dal considerare la generazione del *fascio di rette o di raggi* (insieme di tutte le rette d'un piano passanti per un punto, o, rispettivamente, di tutti i raggi del piano aventi l'estremo in quel punto) mediante il movimento di una retta o di un raggio, nel piano, attorno ad un punto.

Esso conduce a porre pei raggi di un fascio il postulato seguente:

V*a*. *I raggi di un fascio si possono pensare in una disposizione circolare naturale che ha due sensi o versi, l'uno inverso dell'altro*, in modo che:

1° Dato un qualsiasi raggio *a* del fascio, e fissato uno dei due sensi esiste *un* ordine naturale del fascio, che ha il dato senso ed *a* come primo elemento. In esso

a) di due raggi *b*, *c*, sempre l'uno, per es. *b*, precede l'altro (e allora *c* segue *b*);

b) se *b* precede *c* e *c* precede *d*, sempre *b* precede *d*;

c) tra due raggi *b*, *c* esistono infiniti raggi intermedi;

d) non esiste un *ultimo* raggio.

2° I due ordini naturali del fascio che hanno lo stesso primo raggio e senso inverso, sono l'uno inverso dell'altro.

3° Due ordini naturali del fascio che hanno lo stesso senso e diversi primi elementi, p. es. *a* e *b*, si deducono l'uno dall'altro con la permutazione circolare che porta *a* in *b*.

4° Se più raggi di un fascio susseguentisi in un ordine naturale incontrano una retta (del suo piano), i punti d'intersezione si seguono in uno dei due versi della retta.

In base a questo postulato l'*angolo* di due raggi *a*, *b* si definisce come «*l'insieme dei raggi che non seguono* b *in un ordine del fascio, che ha come primo elemento il raggio* a». Si ha così (analogamente a quanto succede pei segmenti sulla linea chiusa) che due raggi di un fascio definiscono due angoli diversi, talchè a designarne uno determinato bisognerà indicare, oltre i lati, un raggio appartenente ad esso.

Ma l'*indirizzo genetico*, del quale qui si è tenuto parola, conduce a sviluppi non tanto semplici nella Geometria elementare, apparendo invece più utile nella Geometria proiettiva ove (dopo la convenzione relativa al punto all'infinito) i punti della retta appaiono disposti in ordine chiuso come i raggi d'un fascio (1).

(1) Cfr. le citate *Lezioni di Geometria proiettiva* dell' ENRIQUES.

Digitized by Google

§ 29. — Passando allora al punto di vista *attuale*, porremo a base della definizione dell'angolo la *divisione del piano in due parti per mezzo della retta.*

Data nel piano una retta r, due punti A e B di quello si dicono *giacenti da parti opposte o dalla stessa parte* di r, a seconda che il segmento AB interseca o no la retta data. Così nel piano se due rette si incontrano in un punto O, i due raggi, in cui ciascuna di esse è divisa da O, giacciono da parti opposte dall'altra retta; e se nel piano una retta a non sega un'altra retta b, la a è tutta da una stessa parte rispetto a b.

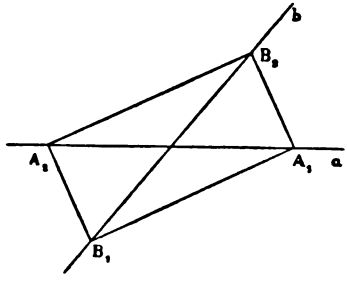
Data, allora, nel piano una retta r ed un punto P, il piano resta diviso in *due parti* (classi di punti), l'una contenente tutti i punti che cadono con P dalla stessa parte di r, l'altra tutti i punti che cadono, rispetto ad a, dalla parte opposta di P; i punti della retta si riguardano come *comuni* alle due parti opposte e si dice anche che la retta *limita* ciascuna delle due parti. Ma può nascere il dubbio che questa divisione in parti del piano dipenda in qualche modo dalla scelta particolare del punto P. Un tale dubbio non può esser tolto se non dal seguente postulato:

V*b*. *Se in un piano due punti* B *e* C *giacciono dalla stessa parte di una retta* r, *ed il punto* A *giace da parte opposta di* B, A *giace pure da parte opposta di* C.

Ammesso questo postulato, si dimostra il seguente teorema fondamentale: *Due rette* a, b *che si segano, dividono il piano che le contiene in quattro parti o regioni angolari, per modo che*:

1) *Ogni punto del piano fuori di* a, b *appartiene ad una delle quattro parti e ad una sola.*

2) *Due punti fuori di* a, b, *appartenenti ad una stessa delle quattro parti, sono gli estremi di un segmento che non sega* a, b.



3) *Due punti fuori di* a, b, *appartenenti a due parti diverse sono gli estremi di un segmento che sega una almeno delle due rette.*

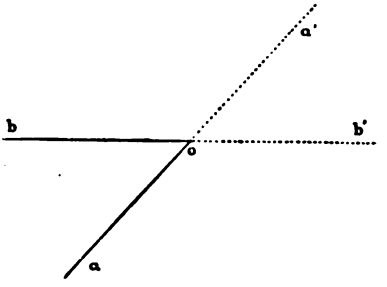
Codeste quattro regioni si ottengono, considerando, nei quattro modi possibili, i punti comuni ad una delle due regioni in cui il piano è diviso da a (regioni relative ad a) e ad una delle due regioni in cui il piano è diviso da b (regioni relative a b). Ciascuna delle coppie di regioni che così si ottengono

Digitized by Google

ammette punti comuni: infatti se A_1, A_2 sono due punti di a, giacenti da parti opposte di b, e B_1, B_2 due punti di b, giacenti da parti opposte di a, i segmenti A_1B_1, B_1A_2, A_2B_2, B_2A_1 dànno (esclusi gli estremi) punti dei quattro settori ordinatamente.

I due raggi che limitano un settore angolare si dicono *lati* di esso e i loro punti si considerano (in base alla convenzione fondamentale) come appartenenti al settore.

Ciò posto, abbiamo che due *raggi* a, b, aventi l'origine O in comune e non appartenenti ad una stessa retta, definiscono un ben determinato *settore angolare*, contenente tutti i punti comuni a quella delle regioni piane relativa alla retta di a che contiene b e a quella delle regioni piane relative a b che contiene a. Il settore angolare, determinato dai raggi a', b', opposti rispettivamente ad a, b, dicesi settore angolare *opposto al vertice* di ab. Se P e Q sono due punti del settore angolare ab (o dei raggi a, b rispettivamente) l'intero segmento PQ vi appartiene, perchè è tutto costituito di punti che giacciono da quella stessa parte di a (e di b) da cui cadono P e Q. Analogamente appartiene per intero al settore angolare ogni raggio uscente da O e passante per un qualsivoglia punto di esso (raggio *compreso* fra a e b); onde risulta che *ogni punto di un segmento avente gli estremi sui lati di un settore è proiettato dal vertice secondo un raggio appartenente al settore.*



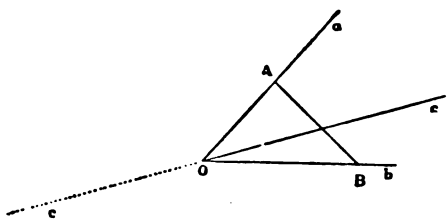
§ 30. — Premesse queste considerazioni, si può definire come *angolo* ab *o* ba *l'insieme dei raggi uscenti da* O *e appartenenti al settore angolare che ha per lati* a *e* b. All'angolo si aggiungono in accordo con le nostre precedenti convenzioni, i lati a e b.

Definito in tal modo l'angolo, importa dimostrare il seguente teorema, il quale enuncia una proprietà dell'angolo, che, come vedremo più avanti, può essere assunta a definirlo: *Dato un angolo* ab, *ogni punto di un qualsiasi segmento* AB, *avente un estremo su ciascun lato, è proiettato dal vertice* O *secondo un raggio appartenente all'angolo, e, viceversa, ogni raggio dell'angolo interseca il segmento* AB *in un punto.*

Digitized by Google

La prima parte è implicita in quanto s'è detto dianzi pel settore angolare. Dimostriamo perciò la seconda.

Dato l'angolo ab e congiunto un punto A di a con un punto B di b, si conduca il raggio c appartenente all'angolo. Sarà dimostrato che il raggio c interseca in un punto il segmento AB, quando siasi fatto vedere che i due raggi a, b giacciono, da parti opposte rispetto alla retta del raggio c. Infatti, quando siasi assodato questo fatto, si avrà che il segmento AB intersecherà o il raggio c o il suo opposto c'. Ma quest'ultima circostanza non può verificarsi, perchè mentre i punti di AB sono interni all'angolo, quelli di c' sono esterni; onde si concluderà che veramente AB interseca il raggio c.



Ora, che i raggi a e b cadano da parti opposte rispetto alla retta del raggio c si dimostra notando che se i raggi a e b cadessero rispetto alla retta del raggio c dalla stessa parte, nessun punto di codesta retta potrebbe appartenere, per definizione, all'angolo ab, mentre, per ipotesi, il raggio c è interno ad esso.

Dal teorema così dimostrato discende come corollario che: *Se due raggi appartengono all'angolo di due altri, l'angolo definito dai due primi è interno* (costituito da raggi *interni*) *all'angolo definito dai due secondi.*

§ 31. — La definizione d'angolo del numero precedente e il postulato Vb permettono di sviluppare in forma logicamente rigorosa, quelle considerazioni topologiche di partizione del piano, che stanno alla base della Geometria elementare e che nella grande maggioranza dei trattati vengono di solito desunte tacitamente dalla intuizione. Su questo importante argomento torneremo più avanti; qui intanto ci limiteremo a dimostrare il seguente teorema fondamentale:

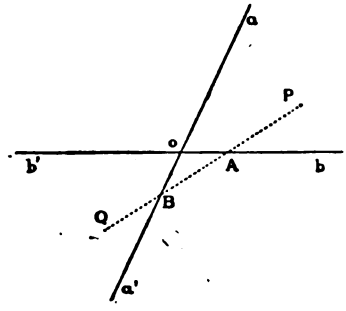
Se P *è un punto interno ad un angolo* (*o settore angolare*) ab e Q *è un punto esterno, il segmento* PQ (se non passa pel vertice), *incontra uno dei lati dell'angolo* (o del settore angolare).

Infatti, dato il punto P interno all'angolo, distinguiamo due

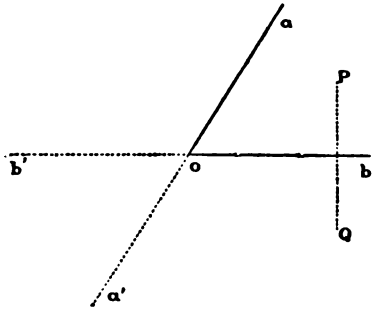
Digitized by Google

casi, a seconda che il punto Q, esterno ad ab, è interno od esterno al settore angolare $a'b'$, opposto al vertice rispetto ad ab.

Nel primo caso P e Q giacciono da parti opposte, tanto rispetto alla retta di a, quanto rispetto alla retta di b; onde il segmento PQ incontra codeste due rette in due punti B e A rispettivamente. Ora non è possibile che simultaneamente B appartenga ad a' e A a b'; giacchè in tal caso, insieme con P anche il punto Q cadrebbe fuori dell'angolo $a'b'$.



Se poi Q è esterno oltre che all'angolo ab, anche all'angolo $a'b'$, esso deve cadere con P da parti opposte rispetto ad una delle rette, per es. alla retta di b, e dalla stessa parte rispetto all'altra. Il segmento PQ incontrerà quindi la retta del raggio b, e, poichè l'intero segmento cade da quella parte della retta di a, in cui è P e quindi ancora il raggio b, esso incontra precisamente il raggio b.



Analogamente si dimostra che: *Se* P e Q *sono due punti esterni ad un angolo* (*o settore angolare*) ab, *il segmento* PQ (*se non passa pel vertice*) *o non interseca nessuno dei lati dell'angolo* (*o del settore angolare*) *o li interseca tutti e due.*

Si può allora concludere che *due raggi* (non opposti) *a* e b *uscenti da un punto* O, *dividono il piano in due parti* (che si dicono *limitate* dalla *linea* costituita dall'insieme dei due raggi) *in modo che, considerati due punti* P *e* Q *fuori di* a *e* b, *se essi giacciono da parti opposte, il segmento* PQ *interseca in un punto la linea di limitazione*; *se essi giacciono dalla medesima parte, il segmento* PQ *o passa pel punto* O *comune ai due raggi o li interseca entrambi o non ne interseca nessuno.*

Una di codeste due parti è il settore angolare convesso corrispondente all'angolo $\widehat{ab}$: l'altra si potrà chiamare il *settore an-*

Digitized by Google

golare concavo $\widehat{ab}$; dopo di che si potrà anche definire l'*angolo concavo* $\widehat{ab}$ come l'insieme dei raggi appartenenti al settore concavo $\widehat{ab}$.

Come termine di passaggio dagli angoli convessi ai concavi, si ha l'*angolo piatto*; ed una ulteriore estensione del concetto di angolo si ottiene definendo come *angolo*, in qualsivoglia caso, la *somma di più angoli* (convessi) *consecutivi*: con che si è tratti a considerare *angoli di un giro* ed anche più estesi di un giro (1).

§ 32. **I versi di rotazione del piano.** — A completare gli sviluppi precedenti sul concetto di angolo vogliamo mostrare come le definizioni stabilite in ordine alla concezione attuale del piano, conducano facilmente a definire i versi degli angoli nel fascio (riportandoci così alle proprietà che si presentano come prime dal punto di vista genetico) e più in generale a paragonare i versi di due angoli qualsiansi in un medesimo piano, dando così un assetto rigoroso alla teoria dei *versi di rotazione del piano* (2).

Ci limiteremo per semplicità a considerare *angoli convessi*, qualifica che verrà sottintesa nel seguito.

Stabiliamo anzitutto che:

Gli angoli di un fascio dove si distingua l'ordine dei loro lati, si possono distribuire in due classi, chiamando angoli «di ugual verso» quelli della stessa classe, e angoli di «verso opposto» quelli appartenenti a classi diverse. Questa distribuzione risulta fissata dalle condizioni definitrici seguenti:

1° Gli angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{ba}$ hanno versi opposti, ed un angolo che abbia ugual verso di $\widehat{ab}$ ha verso opposto di $\widehat{ba}$.

2° Gli angoli $\widehat{ab}$ ed $\widehat{ac}$, aventi comune il primo lato, hanno versi uguali od opposti secondochè b e c cadono dalla stessa parte o da parti opposte della retta a ($\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$ hanno versi uguali od op-

(1) Cfr. ENRIQUES-AMALDI, *Elementi di Geometria ad uso delle scuole secondarie superiori*, 1ª edizione, Bologna, Zanichelli, 1902.

(2) Dal punto di vista genetico i versi di due fasci nel piano possono confrontarsi in base al loro carattere proiettivo (cfr. il post. *Va* 4° del § 28). Lo sviluppo della teoria dei versi fu posta appunto su queste basi dal VERONESE, *Fondamenti di Geometria*, pagg. 347, 374. Cfr. pure dello stesso Autore, *Elementi di Geometria*, 2ª edizione (1901), parte II, pag. 55. Per la teoria qui sviluppata cfr. ENRIQUES-AMALDI, *Elementi di Geometria*, 1ª edizione. Un altro assetto della teoria fu proposto da B. LEVI, *Sull'uguaglianza diretta ed inversa delle figure*. «Periodico di Matematica», vol. XIX (1904).

Digitized by Google

posti secondochè a e c cadono da parti opposte o dalla stessa parte di b).

3° Angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ (collo stesso vertice) hanno versi uguali se i loro versi sono ambedue uguali o ambedue opposti al verso di $\widehat{ac}$; hanno versi opposti se l'uno di essi ha ugual verso e l'altro verso opposto ad $\widehat{ac}$.

Per brevità scriveremo

$$Vab = Vcd$$

e

$$Vab \neq Vcd,$$

per designare rispettivamente l'uguaglianza e l'opposizione di verso di due angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$.

Occorre dimostrare che

A. Dati tre raggi a, b, c colla medesima origine i tre angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$ dànno luogo ad una coppia di angoli d'ugual verso ed a due di verso opposto, oppure a tre coppie di angoli di ugual verso. Cioè da

$$Vab = Vbc, \qquad Vbc = Vca$$

o da

$$Vab \neq Vbc, \qquad Vbc \neq Vca,$$

si deduce

$$Vab = Vca;$$

ed invece da

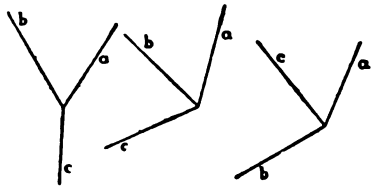
$$Vab = Vbc, \qquad Vbc \neq Vca$$

o da

$$Vab \neq Vbc, \qquad Vbc = Vca$$

segue

$$Vab \neq Vca.$$



Dim. — Limitiamoci per brevità ad esaminare una delle ipotesi, p. es.

$$Vab \neq Vca$$

(ossia $Vab = Vac$).

Digitized by Google

Allora, pel criterio 2°, b, c cadono dalla stessa parte di a, e però b appartiene all'angolo $\widehat{ac}$, oppure c ad $\widehat{ab}$. Nella 1ª ipotesi

$$Vab = Vbc$$

e

$$Vbc \neq Vca \qquad \text{ecc.}$$

Analogamente negli altri casi.

B. Dati 4 raggi a, b, c, d coll'estremo comune, il criterio 3° conduce al medesimo risultato comunque si confrontino gli angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ all'angolo $\widehat{ac}$ o a uno degli angoli $\widehat{bd}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ad}$ (o ai loro opposti).

Dim. — Occorre distinguere varie ipotesi; per brevità esamineremo un sol caso a titolo d'esempio.

Supponiamo dunque che sia

$$Vab = Vac$$
$$Vcd = Vac,$$

e dimostriamo che se

$$Vab = Vbc$$

segue

$$Vcd = Vbc;$$

e se invece

$$Vab \neq Vbc,$$

segue

$$Vcd \neq Vbc.$$

Le ipotesi

$$Vab = Vac \neq Vca, \qquad Vab = Vbc$$

portano (A)

$$Vbc \neq Vca$$

cioè a, b cadono dalla stessa parte di c; e l'ipotesi

$$Vcd = Vac$$

significa che a, d cadono da parte opposta di c; quindi b, d sono da parte opposta di c, cioè

$$Vbc = Vcd \qquad \text{ecc.}$$

Se invece adottiamo le ipotesi

$$Vab \neq Vca, \qquad Vab \neq Vbc,$$

Digitized by Google

segue (A)

$$Vbc = Vca,$$

cioè a, b cadono da parte opposta di c; e siccome (essendo $Vcd = Vac$) a, d cadono pure da parte opposta di c, segue che b, d sono dalla stessa parte di c, cioè

$$Vbc \neq Vcd \qquad \text{ecc.}$$

C. Dati 5 raggi a, b, c, d, e coll'estremo comune, se

$$Vab = Vcd, \qquad Vcd = Vde$$

oppure

$$Vab \neq Vcd, \qquad Vcd \neq Vde$$

segue

$$Vab = Vde;$$

e se invece

$$Vab = Vcd, \qquad Vcd \neq Vde$$

oppure

$$Vab \neq Vcd, \qquad Vcd = Vde$$

segue

$$Vab \neq Vde.$$

Dim. — Consideriamo per brevità una sola ipotesi: sia per es.

$$Vab = Vcd, \qquad Vcd = Vde.$$

Si avrà (B)

[1] $$Vab = Vad, \qquad Vad = Vcd$$

oppure

[2] $$Vab \neq Vad, \qquad Vad \neq Vcd.$$

Ora se sussistono le [1], da

$$Vad = Vcd, \qquad Vcd = Vde$$

segue

$$Vad = Vde,$$

ed essendo

$$Vab = Vad$$

ciò significa (B) che

$$Vab = Vde \qquad \text{ecc.}$$

Analogamente nel caso [2].

Digitized by Google

D. Dati 6 raggi a, b, c, d, e, f col vertice comune, se

$$Vab = Vcd, \qquad Vcd = Vef$$

oppure

$$Vab \neq Vcd, \qquad Vcd \neq Vef,$$

segue

$$Vab = Vef\,;$$

se invece

$$Vab = Vcd, \qquad Vcd \neq Vef$$

oppure

$$Vab \neq Vcd, \qquad Vcd = Vef,$$

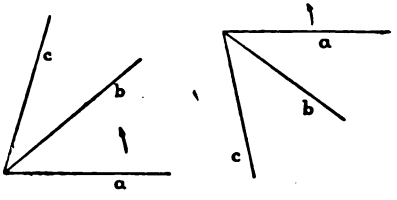
segue

$$Vab \neq Vef.$$

Dim. — La dimostrazione procede dal teorema C come quella di C da B.

I teoremi A, B, C, D *significano che essendo dati due angoli col vertice comune, i criteri stabiliti permettono di decidere in modo univoco se essi hanno versi uguali od opposti, per modo che angoli aventi ambedue versi uguali od opposti ad un terzo hanno versi uguali fra loro, ed angoli di cui l'uno abbia ugual verso e l'altro verso opposto relativamente ad un terzo hanno fra loro versi opposti.*

§ 33. — Nota. In base al teorema del § 32 si possono ordinare naturalmente i raggi d'un fascio, a partire da un primo raggio a, in due versi opposti procedendo come segue:



Si fissi anzitutto che i raggi di uno dei due semipiani relativi ad a, che diremo [1] precedono quelli dell'altro, che diremo [2]. Poi, essendo dati due raggi b, c si fissi che:

b precede c se i due raggi appartengono al semipiano [1] e

$$Vab = Vbc\,;$$

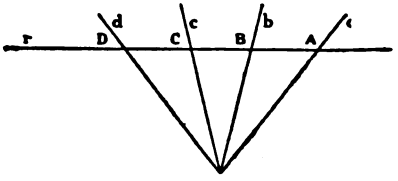
b segue c se i due raggi appartengono al semipiano [2] e

$$Vab = Vbc$$

(e oppostamente, se $Vab \neq Vbc$).

Digitized by Google

È facile provare che se più raggi a, b, c, d,... susseguentisi nell'ordine stabilito e giacenti da una stessa parte di a intersecano una retta r, i punti d'intersezione A, B, C, D.... si susseguono sulla retta r.



Suppongasi per es. che i raggi nominati cadano nel semipiano [1], avremo:

$$Vab = Vbc,$$

e perciò C da parte opposta di A rispetto a b e a B;

$$Vcd = Vac$$

e perciò D da parte opposta di A rispetto a C ecc.

Segue di qui che se a, b, c, d.... sono susseguentisi in un verso del fascio che ha per primo raggio a, anche b, c, d,... situati dalla stessa parte di a, si susseguono pure in un verso che ha come primo elemento b.

La stessa proprietà si verifica per i raggi c, d.... interni ad un medesimo angolo formato dalle rette a, b. E se ne deduce facilmente che tutti gli ordini naturali definiti a partire dai diversi raggi in un fascio, dànno luogo a due versi di disposizione circolare di questo (§ 28).

Così la definizione attuale dei versi in un fascio si riconduce alla definizione genetica.

§ 35. — Ora ci proponiamo di confrontare i versi di due fasci diversi in uno stesso piano. Porremo la seguente

Def. — Due angoli di un piano, tali che il primo lato dell'uno ed il primo lato dell'altro appartengano ad uno stesso raggio, si diranno avere versi uguali od opposti secondochè i rimanenti lati sono dalla stessa parte o da parte opposta rispetto al raggio suddetto.

Questa definizione estende quella contenuta nel criterio 2° del § 32.

Occorre quindi dimostrare i due teoremi seguenti:

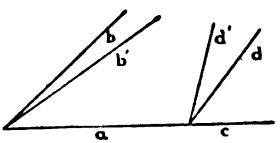
Teor. A. — Se $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ sono due angoli di un piano tali che il raggio a contiene c, e

$$Vab = Vcd;$$

Digitized by Google

e se b', d' sono due raggi cogli estremi nei vertici dei due angoli, dalle relazioni

$$Vab' = Vab, \quad Vcd' = Vcd$$



o

$$Vab' \neq Vab, \quad Vcd' \neq Vcd$$

segue

$$Vab' = Vcd' ;$$

e dalle

$$Vab' \neq Vab, \quad Vcd' = Vcd$$

o

$$Vab' = Vab, \quad Vcd' \neq Vcd$$

si deduce

$$Vab' \neq Vcd'.$$

Dim. — Consideriamo per brevità la prima ipotesi. Allora (§ 33 criterio 2°) b' e d' sono dalla stessa parte rispetto ad a, c, quindi

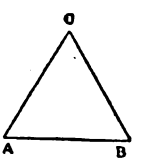
$$Vab' \neq Vcd'$$ ecc.

Cor. — Se A, B, C sono tre punti non in linea retta

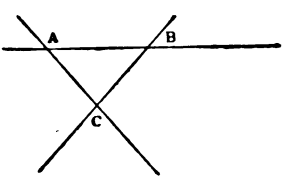
$$V\widehat{BAC} \neq V\widehat{ABC}.$$

Infatti, se A' è un punto del prolungamento di AB,

$$V\widehat{BAC} = V\widehat{A'BC}.$$



Teor. B. — In un piano due angoli di verso ambedue uguale od opposto ad un terzo hanno versi uguali fra loro; due angoli di cui l'uno abbia verso uguale e l'altro opposto ad un terzo hanno versi opposti.



Dim. — Siano A, B, C i tre vertici degli angoli suddetti, e poniamo che essi non appartengano alla stessa retta (caso che si esaurisce subito).

Basterà confrontare i versi definiti nei tre fasci paragonando angoli particolari di questi. Ora si ha

$$V\widehat{BAC} \neq V\widehat{ABC}$$
$$V\widehat{CAB} \neq V\widehat{ACB}$$
$$V\widehat{BCA} \neq V\widehat{CBA},$$

Digitized by Google

cioè

$$V\widehat{ABC} = V\widehat{BCA}$$
$$V\widehat{BCA} = V\widehat{CAB}$$
$$V\widehat{ABC} = V\widehat{CAB},$$

dunque i versi dei fasci B, C uguali al verso di A sono uguali fra loro ecc.

§ 35. **L'indirizzo del Pasch.** — Noi abbiamo sin qui indicati, per lo svolgimento dei primi concetti della Geometria, diversi schemi, in ciascuno dei quali la *retta* e il *piano* compaiono come enti primitivi, mentre *si definiscono*, per mezzo di quelli, il *segmento* e l'*angolo*.

Il Pasch (1) ispirandosi ad una concezione *empirica* della Geometria trova preferibile di percorrere la via inversa, movendo dai concetti primitivi di *segmento* e di *regione piana* (finita) per giungere alla definizione della *retta* e del *piano*.

L'alto interesse critico dell'analisi compiuta dal Pasch ci induce a riprodurre fedelmente i primi principî delle sue lezioni.

Il Pasch, assunto, come già si disse, a concetto primitivo quello di *segmento rettilineo*, o, semplicemente, *segmento*, ammette di poter parlare, senza ulteriori schiarimenti, di « un segmento condotto fra due punti » e di « punti giacenti *entro* un segmento » ; e stabilisce un primo gruppo di cinque postulati, che conducono alla definizione di « segmento *parte* di un altro » :

1° *Fra due punti si può sempre condurre un segmento ed uno solo.*

2° *Si può sempre assegnare un punto che cada entro un dato segmento.*

3° *Se il punto* C *giace entro il segmento* AB, *il punto* A *giace fuori del segmento* BC.

4° *Se il punto* C *giace entro il segmento* AB, *tutti i punti del segmento* AC *sono anche punti di* AB.

5° *Se il punto* C *giace entro il segmento* AB, *un punto, che non appartenga nè ad* AC *nè a* BC *non può appartenere al segmento* AB.

In base a questi postulati si può dimostrare che se un punto C

(1) *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, Teubner, 1882.

Digitized by Google

è interno al segmento AB, e il punto D è interno a BC, C è interno ad AD.

Allora il segmento CD si dice *parte* di AB e si dimostra che se C e D sono punti di AB, e uno almeno di essi è interno (non è estremo) il segmento CD è parte di AB.

Ciò posto, basta l'aggiunta dei tre postulati seguenti per giungere alla definizione di retta:

6° *Se* A, B *sono punti qualsiansi, si può sempre scegliere un punto* C *in modo che* B *giaccia entro il segmento* AC.

7° *Se il punto* B *giace dentro i segmenti* AC *e* AD, *o il punto* C *cade dentro il segmento* AD, *o il punto* D *cade dentro* AC.

8° *Se il punto* B *cade dentro il segmento* AC *e il punto* A *dentro il segmento* BD, *e se si uniscono* C, D *per mezzo di un segmento rettilineo, il punto* A *cade anche nel segmento* CD.

Ammessi questi tre nuovi postulati, il Pasch conviene anzi tutto di dire che tre punti formano una «successione rettilinea» (o, come noi potremo dire, «sono allineati») quando uno di essi giace entro il segmento determinato dagli altri due; e dimostra che se sono allineati i punti A, B, C e i punti A, B, D, son pure allineati i punti A, C, D e B, C, D.

A questo punto, infine, vien definita la retta AB come «l'insieme di tutti i punti C allineati con A e B» e risulta da quanto precede la vicendevole equivalenza delle tre affermazioni: C appartiene alla retta AB, A appartiene alla retta BC, B appartiene alla retta CA.

I postulati 1°-8° dianzi enunciati permettono di dimostrare per la retta tutte le proprietà di ordinamento e di partizione, che furono da noi espresse nei nostri postulati IVa e IVb; ma noi qui non ci indugeremo su codesta deduzione e rimandiamo senz'altro il lettore desideroso di averne notizia, alle Lezioni del Pasch.

§ 36. — Per giungere alla definizione di *piano* il Pasch muove dal concetto primitivo di *regione piana* (*convessa*) e, parlando, senza ulteriore schiarimento, di «punti di una regione piana» stabilisce i seguenti quattro postulati, relativi, in sostanza, alla possibilità di ampliare, ad arbitrio, una data regione piana:

9° *Per tre punti arbitrari si può far passare una regione piana.*

10° *Se per due punti di una regione piana si conduce un segmento, esiste una regione piana, che contiene tutti i punti della regione piana data e del segmento considerato.*

Digitized by Google

11° *Se due regioni piane* E, E' *hanno un punto comune, si può sempre assegnare un altro punto, che sia contenuto in una regione piana contenente tutti i punti di* E *e in un'altra regione piana contenente tutti i punti di* E'.

12° *Se in una regione piana tre punti* A, B, C *sono congiunti a due a due per mezzo delle rette* AB, BC, CA *e si è condotto nella stessa regione piana un segmento* DE *per un punto interno al segmento* AB, *il segmento* DE *o un suo prolungamento passa o per un punto del segmento* AC *o per un punto del segmento* BC.

In base ai precedenti postulati, il PASCH dimostra che se quattro punti *A*, *B*, *C*, *D* giacciono su di una regione piana *E* ed *E'* è una qualsiasi regione piana passante per *A*, *B*, *C*, esiste sempre una regione piana contenente tutti i punti di *E'* e il punto *D*.

Dopo di che egli stabilisce di dire per definizione che, se esiste una regione piana contenente *A*, *B*, *C*, *D*, « il *piano ABC* passa per *D* ».

Risulta da quanto s'è detto dianzi come lo stesso fatto si possa anche esprimere dicendo indifferentemente o che il piano *BCD* passa per *A*, o che il piano *CDA* passa per *B*, ecc.

A questo punto, partendo dalla data definizione e dai postulati 9°-12°, si stabilisce l'esistenza e la unicità del piano passante per tre punti non allineati, e si dimostra la proprietà fondamentale del piano, per cui esso contiene per intero la retta congiungente due suoi punti qualsiansi.

Ricorderò da ultimo come le proprietà della partizione del piano mediante una sua retta, siano dal PASCH introdotte nel suo sistema mediante il seguente teorema fondamentale: *Se* A, B, C *sono tre punti non allineati e per un punto* D *del segmento* AB *si conduce nel piano* ABC *una retta non passante nè per* A, *nè per* B, *nè per* C, *questa retta interseca o la retta* AC *fra* A *e* C *o la retta* BC *fra* B *e* C.

Noi non ci tratterremo ulteriormente su questi interessanti sviluppi; solo noteremo come i cenni da noi dati dianzi bastino a mettere in luce l'equivalenza logica del sistema di postulati del PASCH coi sistemi da noi abbozzati nei numeri precedenti.

§ 37. — Alle *Vorlesungen* del PASCH vanno ravvicinati *I Principî di Geometria logicamente esposti* (1) del PEANO. In essi il PEANO applica la Logica matematica ad analizzare i principî della

(1) Torino, Bocca, 1889.

Digitized by Google

Geometria, prendendo le mosse dai risultati dell'analisi già precedentemente compiuta dal PASCH. Questi ha, in sostanza, dimostrato la riducibilità di tutte le idee geometriche alle quattro seguenti: *punto, segmento, regione piana* e *moto*.

Ora il PEANO scompone nei loro elementi i postulati del PASCH (1) ed elimina dal gruppo delle idee primitive quella di *regione piana*. Egli, invero, costruisce ancora la retta per mezzo del segmento; ma, per quel che riguarda il piano, in luogo di assumere la *regione piana*, come un nuovo ente non definito, parte da un triangolo ABC, definito come insieme dei punti appartenenti ai segmenti che congiungono a due a due i punti dei tre segmenti AB, BC, CA; e definisce il piano ABC come « l'insieme dei punti allineati colle coppie di punti appartenenti al triangolo ».

Questo punto di vista si lascia riattaccare alle nostre considerazioni precedenti sull'*angolo*, qualora si assuma la seguente

DEF. — Angolo di due raggi *ab* uscenti da un punto *O* è *l'insieme dei raggi proiettanti da* O *un segmento avente i suoi estremi* A, B *rispettivamente su* a, b.

Alla quale, perchè l'angolo costruito risulti indipendente dal segmento, occorre aggiungere il *postulato*

V c. *Un raggio dell'angolo* ab *incontra in un punto ogni segmento avente gli estremi sui lati* a, b.

Cogli sviluppi sopra accennati il PEANO ha messo in luce come la *Geometria di posizione* possa fondarsi movendo da due sole idee primitive: *punto* e *segmento*, e come ad esprimere le idee della *Geometria metrica* basti aggiungere alle due precedenti la idea del *moto* (2).

(1) Così, dopo aver notato come nel linguaggio comune l'espressione « due punti » presenta ambiguità (in quanto talvolta indica « due punti qualsiansi », tal altra « due punti distinti », in certi casi si riferisce alla coppia presa in un ordine di successione, in certi altri alla coppia considerata come aggruppamento) fa notare che il 1° postulato del PASCH non è perfettamente determinato. Egli mostra parimenti che il postulato 3° si può decomporre in tre proposizioni distinte, di cui una è dimostrabile.

(2) Cfr., oltre i citati *Principî* ecc., un articolo del PEANO nella « Rivista di Matematica », 1894, pag. 51, e dello stesso Autore: *La Geometria fondata sulle idee di punto e di distanza*. « Atti della R. Acc. di Torino », XXXVIII, 1902. Cfr. inoltre: PADOA, *Un nuovo sistema di definizioni per la Geometria euclidea*. « II Congrès intern. des Math. », Paris, 1900; VEBLEN, *A system of axioms for Geometry*. « Trans. of the Amer. Society », V, 1904.

Digitized by Google

Mettendosi dal punto di vista formale della *riduzione del numero delle idee primitive* (e dei loro simboli rappresentativi), e lasciando da parte ogni altra esigenza dei postulati in ordine all'intuizione, il PIERI (1) ha indicato come possa ottenersi una riduzione ulteriore; egli analizzando dapprima i principî della Geometria proiettiva e in seguito quelli della Geometria elementare, ha dimostrato che tutta la Geometria si può costruire con due sole idee primitive, quelle di *punto* e di *distanza* (2).

A quest'ordine d'idee si possono riattaccare anche gli studi di BEPPO LEVI (3) assai notevoli da vari punti di vista, e la ricerca del KAGAN (4), il cui esame non rientra nel quadro del nostro lavoro.

§ 38. **Sulle partizioni del piano.** — Al § 29 abbiamo preso le mosse, per lo studio delle proprietà superficiali del piano, dalla divisione in parti del piano mediante una sua retta; e in base alle proprietà così formulate, abbiamo poi caratterizzato la partizione del piano cui dànno luogo due raggi uscenti da un punto (§ 31).

Torniamo qui a siffatto ordine di considerazione per svilupparlo alquanto.

Cominciamo perciò col notare come due figure o luoghi geometrici si possano generalmente combinare in due modi diversi.

Se due luoghi F, F' sono caratterizzati rispettivamente dalle proprietà A, B, possiamo considerare:

1° Il luogo di tutti i punti che godono della proprietà A o della proprietà B.

(1) *Principî della Geometria di Posizione composti in sistema logico-deduttivo.* « Mem. dell'Acc. delle Sc. di Torino », vol. XLVIII² (1898); *Della Geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo.* « Ibidem », vol. XLIX² (1899); *La Geometria elementare istituita sulle nozioni di « punto » e « sfera ».* « Mem. della Società dei XL », 1908.

(2) Il PIERI ha anzi messo in luce come non sia necessario assumere l'idea di *distanza* come una relazione fra quattro punti A, B, C, D sotto la forma « la distanza AB è uguale alla distanza CD »; ma basta assumere come primitiva la relazione fra tre punti A, B, C: « i punti A e B sono equidistanti da C » (idea di cui si rinviene una traccia in EUCLIDE e che fu ripresa ai nostri tempi dal VERONESE).

(3) *Sui fondamenti della metrica proiettiva.* « Mem. dell'Acc. delle Sc. di Torino », vol. LIV² (1904).

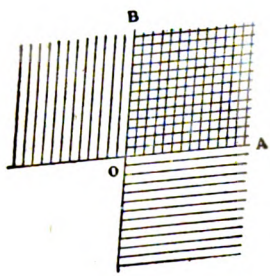
(4) *Ein System von Postulaten welche die euclidische Geometrie definieren.* « Jahresber. der d. Math. Vereinig », 11, 1902.

Digitized by Google

2° Il luogo dei punti che godono simultaneamente della proprietà A e della proprietà B.

Il primo luogo si dirà ottenuto combinando i luoghi dati *per riunione*, il secondo *per interferenza* (1).

Così p. es., date per un punto O due rette OA, OB, consideriamo il semipiano relativo ad OA in cui cade B e il semipiano relativo ad OB in cui cade A. Essi, combinati per interferenza dànno il settore convesso $\widehat{AOB}$, e combinati per riunione dànno il settore concavo, che si ottiene togliendo dal piano il settore opposto al vertice ad $\widehat{AOB}$.



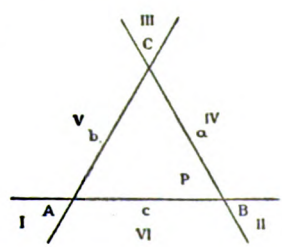
Ciò premesso, passiamo ad occuparci delle partizioni del piano determinate da più di due rette; e consideriamo anzitutto tre punti A, B, C e le tre rette $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, che a due a due li congiungono.

Detto *triangolo* la figura costituita dai tre segmenti (*lati*) AB, BC, CA, notiamo che i tre semipiani aA, bB, cC (cioè i tre semipiani relativi ad a, b, c e contenenti rispettivamente i punti A, B, C) combinati a due a due per interferenza, determinano tre angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$ (*angoli* del triangolo).

Ora sussiste il seguente teorema:

Un punto, che sia interno a due angoli del triangolo, è interno anche al terzo.

Infatti se un punto P è interno, p. es. agli angoli $\widehat{bc}$ e $\widehat{ac}$ vuol dire, per definizione, che esso cade rispetto alla b dalla stessa parte di B e rispetto alla a dalla stessa parte di A; in altre parole esso è comune ai due semipiani aA, bB, ossia appunto è interno anche all'angolo $\widehat{ab}$.



Sono allora giustificate le seguenti definizioni: Si dicono *interni* al triangolo tutti i punti comuni ai tre suoi angoli:

(1) Ognuno riconosce come questi due modi di combinazione dei due luoghi dati abbiano per corrispondenti, nel campo della Logica deduttiva rispettivamente le operazioni di *disgiunzione* o *addizione logica* e di *congiunzione* o *moltiplicazione logica*.

Digitized by Google

si dice *superficie* del triangolo l'insieme dei punti interni ad esso e dei punti dei lati (o punti del contorno).

I punti non appartenenti alla superficie del triangolo diconsi *esterni*.

§ 39. — Risulta da quanto precede che la superficie del triangolo ABC si ottiene combinando *per interferenza* i tre semipiani aA, bB, cC; mentre i punti esterni (insieme col contorno) costituiscono il luogo geometrico, che si ottiene combinando *per riunione* i tre semipiani relativi ad a, b, c ed opposti, rispettivamente, ai tre semipiani che contengono il triangolo.

L'insieme dei punti esterni al triangolo viene diviso dalle rette in *sei regioni*, tre delle quali sono gli angoli opposti al vertice degli angoli del triangolo (le tre regioni I, II, III della figura); le altre tre si ottengono, ciascuna, combinando per interferenza un angolo del triangolo col semipiano relativo al lato opposto, che non contiene il triangolo.

Ciò posto, possiamo ormai caratterizzare la partizione del piano, definita da un triangolo ABC.

Risulta anzitutto dalle definizioni relative al triangolo e dalle proprietà dell'angolo che il *segmento congiungente due punti del contorno o due punti interni di un triangolo appartiene alla superficie del triangolo.*

In secondo luogo abbiamo che *il segmento che congiunge un punto interno ed uno esterno di un triangolo sega il contorno in un punto e in uno solo.*

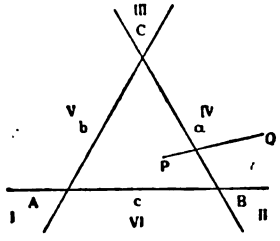
Riferiamoci per la dimostrazione al solito triangolo e siano P e Q i due punti dati, il primo interno, il secondo esterno al triangolo.

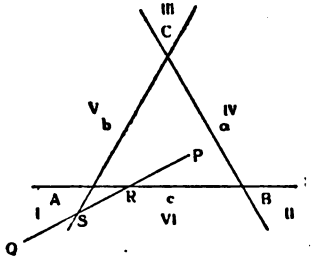
Il punto esterno Q può anzitutto cadere in uno degli angoli del triangolo, p. es. nell'angolo di vertice A. Ciò vuol dire che Q cade con P dalla stessa parte tanto rispetto a b che rispetto a c: non così, per altro, per rispetto ad a, in quanto è esterno ad ABC. Risulta di qui che il segmento PQ incontrerà la retta a in un punto, e, poichè questo punto, come ogni altro di PQ, deve essere interno all'angolo dei raggi AB, AC, esso appartiene al lato BC del triangolo.

Supponiamo, in secondo luogo, che Q non cada in nessuno degli angoli del triangolo: cadrà allora in uno degli angoli opposti al vertice di quelli, per es. nell'angolo opposto al vertice di $\widehat{BAC}$.

Digitized by Google

Allora P e Q cadono da parti opposte tanto di c quanto di b e il segmento PQ incontra queste due rette in due punti R, S rispettivamente. Uno di codesti punti appartiene di necessità al contorno di ABC: se, infatti, così non fosse, insieme con Q anche P



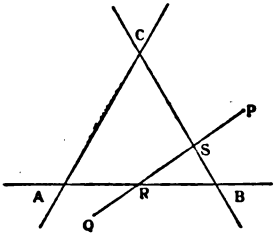


dovrebbe essere esterno all'angolo dei raggi AB, AC, il che è contro l'ipotesi.

Dopo ciò non resta che considerare il caso di due punti P e Q entrambi esterni.

Escludiamo anzitutto che essi si trovino su di una retta passante per un vertice del triangolo.

Allora il segmento PQ può non segare il contorno ed in tal caso esso è tutto esterno al triangolo, giacchè, se avesse qualche punto dentro il triangolo, interseherebbe qualche lato. Se poi il segmento PQ interseca un lato del triangolo, per es. AB in R, vuol dire che la retta PQ lascia da parti opposte i due vertici A e B; e il terzo vertice C, non potendo per ipotesi appartenere alla PQ, cadrà dall'una o dall'altra parte. Se C cade, per es., dalla parte di A, la retta PQ intersecherà anche il lato BC in un punto S e il segmento RS sarà interno al segmento PQ, perchè altrimenti anche il punto R sarebbe, contro l'ipotesi, esterno al segmento PQ. Se ne conclude che il segmento PQ interseca il contorno del triangolo in due punti.



Tutti i risultati precedenti si possono riassumere nel seguente teorema che caratterizza la partizione del piano definita da un triangolo:

Un triangolo divide il piano in due parti (che diconsi *limitate*

Digitized by Google

dal contorno) *per modo che considerando due punti i quali non si trovino sopra una retta passante per un vertice*;

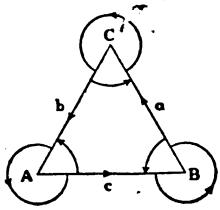
se essi giacciono nella medesima parte, il segmento che li congiunge non sega il contorno o lo sega in due punti;

se essi giacciono da parte opposta, il detto segmento sega il contorno in un punto.

NOTA. — Delle due parti, una è la superficie del triangolo, la quale si distingue dall'altra per essere *finita*, cioè per la proprietà di contenere soltanto dei segmenti di retta e non intere rette o raggi: per contrapposto la *regione esterna*, che contiene delle intere rette (si considerino le congiungenti di due punti situati sui prolungamenti di due lati del triangolo), si potrà dire *infinita*.

§ 40. — Aggiungiamo da ultimo alcune ovvie osservazioni sui versi dei lati e degli angoli del triangolo, il cui interesse potrà poi rilevarsi nelle successive generalizzazioni del concetto di triangolo.

Dato un triangolo ABC, i versi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ dei lati, o i tre versi opposti, combinati insieme, dànno rispettivamente luogo a due versi del contorno del triangolo. Fissato sul contorno uno di codesti versi, per es. il verso ABC, resta determinato in ciascuno degli angoli del triangolo un verso, come proiezione del verso fissato sul lato opposto, ed i tre angoli così ordinati $\widehat{ba}$, $\widehat{cb}$, $\widehat{ac}$ hanno fra loro verso concorde (cfr. § 34). La considerazione del verso del contorno e dei corrispondenti versi degli angoli permette di distinguere, nella teoria della uguaglianza dei triangoli, la *uguaglianza diretta* dalla *uguaglianza inversa* (1).



§ 41. — È senz'altro manifesto come possano generalizzarsi le considerazioni dei numeri precedenti.

Dati n punti A_1, A_2, ..., A_n tali che ciascuna delle rette A_1A_2,

(1) Accanto alla terna dei tre angoli convessi (ordinati) ab, bc, ca del triangolo si può considerare la terna dei tre angoli concavi (ordinati) aventi i medesimi lati. La considerazione di questa doppia serie di angoli è utile nella teoria dei poligoni concavi e si impone nella teoria delle poligonali. Cfr. la citata 1ª ediz. degli *Elementi* di ENRIQUES-AMALDI.

Digitized by Google

$A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ lasci da una medesima parte gli $n-2$ punti che ad essa non appartengono, si dice *poligono convesso* la figura costituita dagli n segmenti (*lati*) A_1A_2, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$, A_nA_1.

Chiamati angoli del poligono gli angoli $\widehat{A_1}$, $\widehat{A_2}, \ldots, \widehat{A_n}$, si dimostra, per induzione completa, che se un punto è interno ad $n-1$ fra codesti angoli è interno anche all'n^{mo}. È allora lecito ripetere qui per i poligoni in generale le definizioni di *punti interni*, di *superficie*, di *punti esterni* e si può anche qui dimostrare che *un poligono divide il piano in due parti* (che diconsi limitate dal contorno ad esse comune) *tali che considerati due punti, fuori del contorno, non appartenenti ad una retta passante per un vertice, se essi giacciono dalla medesima parte, il segmento che li congiunge non sega il contorno o lo sega in due punti*;

se essi giacciono da parti opposte, il detto segmento incontra il contorno in un punto.

Di codeste due parti una è la *superficie* del poligono e si può considerare come ottenuta, combinando per interferenza quei semipiani relativi alle rette dei lati, che contengono il poligono; mentre l'altra regione si ottiene combinando per riunione i semipiani opposti.

Anche qui abbiamo sul contorno due versi opposti, e corrispondentemente a ciascuno di essi, risultano ordinati gli angoli del poligono secondo versi concordi.

§ 42. — Se nella definizione di poligono si lascia cadere la restrizione relativa alla posizione dei vertici rispetto alle rette dei lati, si dà luogo ai poligoni *concavi*, i quali sono *intrecciati* o *sciolti*, secondo che accade o no, che due lati non consecutivi si intersechino.

Un poligono concavo ha almeno un angolo concavo.

Per un poligono concavo sciolto si può sempre definire la *superficie* come riunione delle superficie di più poligoni convessi; ma essa si può definire direttamente con un procedimento analogo a quello da noi tenuto pei poligoni convessi: soltanto i semipiani relativi alle rette dei lati vanno combinati in parte per interferenza e in parte per riunione.

Un poligono concavo sciolto determina ancora una divisione del piano in due parti, rispetto alle quali per altro si può avere per la posizione di due punti un numero maggiore di casi, di quanto è possibile pei poligoni convessi. Si ha invero il seguente teorema:

Digitized by Google

Un poligono concavo sciolto divide il piano in due parti per modo che:

dati due punti del piano, fuori del contorno, i quali non si trovino sopra una retta passante per un vertice, il segmento che li congiunge sega il contorno in un numero pari o dispari di volte, secondochè i punti suddetti giacciono nella medesima parte o in parti diverse rispetto al poligono.

È inteso che se il segmento di cui si discorre nell'enunciato non sega il contorno, il numero delle intersezioni (zero) deve considerarsi come pari e quindi gli estremi del segmento sono nella medesima parte.

I poligoni intrecciati invece non determinano più nel piano una divisione in parti, a meno che non si vogliano considerare come ottenuti per riunione di poligoni sciolti.

Pei poligoni concavi, tanto sciolti quanto intrecciati, importa considerare, in vista delle esigenze della teoria dell' uguaglianza, i due versi del contorno e i versi coordinati degli angoli rispettivi.

§ 43. Nota. — Una ulteriore generalizzazione del concetto di poligono si ottiene considerando poligoni aventi come lati archi di circonferenza e, in particolare, segmenti rettilinei (*poligoni a lati circolari*). Gli esempi più semplici di siffatti poligoni sono dati dai *settori*, dai *segmenti circolari*, dai *fusi*, dalle *lunule*, ecc.

I poligoni a lati circolari sciolti dànno luogo a partizioni del piano, che si possono caratterizzare in base alle proprietà d'intersezione di rette e circonferenze (1).

Ma noi non ci indugeremo ulteriormente su questo punto: basterà di avere richiamato l'attenzione dei lettori su quest'ordine di problemi, che offrono ancora materia di riflessione e di discussione ai cultori della Geometria elementare.

§ 44. Il diedro. — Ad esaurire il programma che ci siamo proposti, non resta più che ad occuparci di quelle proprietà di divisione dello spazio che sono legate al concetto di *diedro*.

Per il *diedro* valgono considerazioni affatto analoghe a quelle svolte sull'*angolo*. Anche qui conviene distinguere il *diedro* come

(1) Un primo abbozzo di teoria dei poligoni a lati circolari si troverà nella 1ª edizione, già più volte citata, degli *Elementi di Geometria ad uso delle Scuole Secondarie Superiori*, a cui collaborammo con F. Enriques.

Digitized by Google

insieme di semipiani, o diedro propriamente detto, dall'insieme dei punti di codesti semipiani, a cui possiamo dare il nome di *settore solido*.

Partendo dalla *concezione genetica* del diedro, si è condotti a riattaccarne la definizione alla generazione dello spazio per mezzo del movimento di un piano (o di una falda di piano) intorno ad una retta. Gli elementi del fascio di semipiani, o di piani completi, vengono così ordinati *a priori* in una *disposizione circolare* (*naturale*), che si può porre a base della definizione di diedro. Per porre in relazione le disposizioni circolari di due fasci qualsivogliano è necessario *postulare* il *carattere proiettivo* di codesta disposizione circolare, per il quale i piani susseguentisi in un fascio sono segati da una retta in punti, che, da ogni retta distinta dall'asse del fascio, sono proiettati secondo piani susseguentisi.

Se riguardiamo invece il *diedro* sotto l'aspetto *attuale*, porremo a base della sua definizione la considerazione della divisione in due parti dello spazio per mezzo di un piano. Definiti due punti A, B come giacenti da parti opposte o dalla stessa parte di un piano α, secondo che il segmento AB incontra o no il piano, è necessario postulare la proposizione:

VI *b*. *Se due punti* B, C *giacciono dalla stessa parte di un piano, ed il punto* A *giace da parte opposta di* B, A *giace anche da parte opposta di* C.

Stabilito quindi il fatto che due piani, intersecantisi secondo una retta, dividono lo spazio in quattro *settori solidi*, dicesi *diedro* di due semipiani α e β uscenti da una retta o, l'insieme dei semipiani appartenenti al settore solido, che è definito da α e β.

Infine, dalla definizione *attuale*, completata dalla proposizione VI *b*, si deduce che ogni semipiano di un diedro $\alpha\beta$ incontra in un punto ogni segmento avente gli estremi su α, β rispettivamente.

Si presenta così un terzo modo (avente, sotto un certo riguardo, carattere genetico) di definire il diedro: « *Dicesi* diedro *l'insieme dei semipiani che da una retta proiettano i punti di un segmento* AB ».

Qui gli *ordini naturali* nel diedro e nel fascio si *deriveranno* da quelli della retta, *postulando* la proposizione:

VI *c*. *Un semipiano di un diedro* $\alpha\beta$ *incontra in un punto un qualsiasi segmento, avente gli estremi sulle facce* α, β.

Le tre vie indicate sono tra loro *equivalenti*. Per ciascuna di esse si incontra un postulato, il cui ufficio si può esprimere chiara-

Digitized by Google

mente dicendo che *esso limita a tre le dimensioni dello spazio.* È per mezzo dell'indicato postulato che, in ciascuno dei tre indirizzi, si dimostra quel teorema, per cui il fatto delle tre dimensioni entra in modo immediato nella serie delle deduzioni geometriche: « *Due piani aventi in comune un punto hanno in comune una retta* ».

Reciprocamente, questa proposizione, assunta come primitiva, permette di dimostrare ciascuno degli accennati postulati relativi al diedro, deducendoli dalle proprietà degli angoli sezioni del diedro stesso, e di svolgere, quindi, i tre diversi ordini di considerazioni, che da essi rispettivamente dipendono.

A ciò si perviene, in sostanza, dimostrando sulla base della proposizione or ora enunciata, che i semipiani di un diedro sono segati da ogni piano non passante per l'asse, ma avente comune con esso un punto, secondo i raggi di un angolo.

Possiamo notare che nel sistema geometrico del Pasch la proprietà fondamentale dello spazio compare appunto sotto la forma del postulato 11° del § 36, che permette di dimostrare che due piani aventi comune un punto hanno comune una retta.

§ 45. **Sulle partizioni dello spazio.** — Le partizioni dello spazio definite da due o più piani o semipiani dànno luogo a considerazioni perfettamente analoghe a quelle da noi svolte sulle partizioni del piano per mezzo di rette.

Quindi noi potremo qui limitarci ad alcuni rapidi cenni.

Un ragionamento analogo a quello del § 31 permette di stabilire che *un diedro divide lo spazio in due parti per modo che, presi due punti non appartenenti ad una retta incidente all'asse, il segmento che li congiunge interseca una sola faccia se i due punti cadono da parti opposte, le interseca entrambe o non ne interseca nessuna se i due punti cadono dalla stessa parte.*

Una delle due parti è il settore (convesso) relativo al diedro considerato; l'altro si potrà chiamare un *settore concavo*, onde poi si dedurrà la definizione del diedro concavo, avente le stesse facce del diedro convesso da cui siamo partiti.

Analoghe considerazioni si possono istituire sul *triedro* (o angoloide trispigolo), che, notoriamente si definisce come la figura costituita da tre raggi a, b, c uscenti da un punto O (*spigoli*) e dai tre angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$ (*facce*). Chiamando *diedri del triedro* i tre diedri determinati dai tre piani ab, bc, ca, presi a due a due, si

Digitized by Google

dimostra (cfr. il § 39) che *un punto il quale sia interno a due diedri del triedro è interno anche al terzo.*

Ciò posto, si diranno *interni* al triedro i punti interni a tutti e tre i suoi diedri; e l'insieme dei punti interni al triedro e di quelli della *superficie* (costituita dalle tre facce) si chiamerà *solido* del triedro. I punti non appartenenti al solido si diranno *esterni* al triedro.

Il solido del triedro si ottiene combinando per interferenza quei tre semispazi, che sono determinati dalle tre facce e contengono il triedro; mentre l'insieme dei punti esterni delle superficie si ottiene combinando per riunione i semispazi opposti.

Codeste due *parti* in cui lo spazio resta diviso dal triedro (il quale si può considerare come comune ad entrambe) sono caratterizzate dalle solite proprietà; cioè, presi due punti qualsiansi, purchè non appartenenti ad una retta incidente ad uno spigolo del triedro, il segmento congiungente interseca una sola faccia se i due punti cadono da parti opposte; ne interseca due o nessuna se i due punti sono dalla stessa parte.

Tutto ciò si estende senz'altro ad un angoloide (convesso) a quanti spigoli si vogliono, cioè alla figura costituita da n raggi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ uscenti da un punto O e dagli n angoli $\widehat{a_1a_2}, \widehat{a_2a_3}, \ldots, \widehat{a_{n-1}a_n}, \widehat{a_na_1}$, sotto la restrizione che ciascuno dei piani $a_1a_2, \ldots, a_{n-1}a_n$ lasci da una stessa parte gli $n-2$ raggi che non giacciono in esso.

E più in generale, considerazioni analoghe alle precedenti valgono per un *poliedro*, il quale si definisce notoriamente, come la figura costituita da più poligoni (*facce*), situati in piani diversi e tali che ognuno dei lati sia comune a due di essi, sotto la restrizione che il piano di ciascuno lasci tutti gli altri da una medesima parte.

Si dimostra per induzione che, dato un poliedro ad n vertici, ogni punto interno ad $n-1$ dei suoi angoloidi è interno anche all'n^{mo}; e così si giunge alla definizione del *solido* del poliedro, il quale si può considerare ottenuto combinando per interferenza quei semipiani, che sono determinati dalle facce del poliedro e contengono il poliedro stesso.

Se nella definizione di angoloide si lascia cadere la posta restrizione sulla posizione degli spigoli rispetto ad una faccia qualsiasi, si dà luogo agli *angoloidi concavi*, i quali possono essere

Digitized by Google

sciolti o intrecciati. Così, togliendo l'analoga restrizione dalla definizione di poliedro, si è condotti a considerare *poliedri concavi*, ciascuno dei quali avrà almeno un angoloide concavo.

Ora, tanto un angoloide concavo, quanto un poliedro concavo determinano ancora una divisione dello spazio in due parti: ma i casi possibili per la posizione di due punti, rispetto all'angoloide o al poliedro, sono in numero maggiore di quanto accadeva nel caso della convessità. Si ha, cioè, che presi due punti, purchè non appartenenti ad una retta incidente ad uno spigolo, se essi sono da parte opposta il segmento congiungente interseca la superficie un numero dispari di volte; se i due punti sono dalla stessa parte, il segmento congiungente interseca la superficie un numero pari o nullo di volte.

Il *solido* dell'angoloide o del poliedro concavo si può definire come riunione di solidi di angoloidi o poliedri convessi; ma si può anche ottenere direttamente, combinando semispazi relativi alle facce, alcuni per interferenza, altri per riunione. La parte di spazio esterna si avrà allora, combinando i semispazi opposti, in modo rispettivamente contrario.

Nota. — Per analogia coi poligoni a lati circolari si è condotti a generalizzare i concetti di angoloide e di poliedro, considerando angoloidi e poliedri a facce cilindriche, coniche, sferiche. Esempi notorî di questa specie di figure sono il *segmento sferico*, lo *spicchio sferico*, il *settore sferico*, ecc. La considerazione di siffatte figure e delle corrispondenti partizioni dello spazio suggerisce tutto un ordine di questioni, che si innestano naturalmente nello sviluppo della Geometria elementare (1). Noi le segnaliamo al lettore, e ci limitiamo a notare come codesti problemi richiedano, a differenza di quanto accade pei poligoni a lati circolari, metodi che trascendono quelli tradizionali della Geometria elementare, in quanto piani, cilindri, coni e sfere si intersecano secondo rette e circonferenze solo in casi particolari, mentre in generale dànno luogo a curve di natura più elevata (*coniche, cubiche gobbe, quartiche gobbe di 1ª specie*).

(1) Si vedano in proposito i più volte citati *Elementi* ecc. di F. Enriques e nostri (1ª edizione). In particolare noi vi traemmo profitto dalla considerazione dei poliedri a facce curve nel confronto fra i solidi dei cilindri, dei coni, delle sfere coi solidi dei poliedri a facce piane.

Digitized by Google

§ 46. Versi elicoidali dello spazio. — Abbiamo già accennato ai due versi di disposizione naturale, in cui risultano ordinati i semipiani di un diedro, in corrispondenza ai due versi di un qualsiasi segmento, avente gli estremi sulle due facce, o ai due versi dell'angolo, sezione del diedro con un piano non passante per l'asse.

Ma nello spazio, a differenza di quanto accade nel piano pei due versi di un angolo, i due versi di un diedro (o del fascio di piani cui esso appartiene) non sono distinti fra loro rispetto ai movimenti, in quanto il diedro è invertibile cioè sovrapponibile a se stesso con lo scambio delle due facce.

Per separare i due versi di un diedro è necessario associare a ciascuno di essi un determinato verso sull'asse del diedro stesso. Si dà così luogo ai due *versi elicoidali* dello spazio o, ciò che è lo stesso, ai due *versi di rotazione dei triedri o della stella.*

Se si parte dalla concezione genetica del diedro, la nozione dei versi elicoidali si desume direttamente dalla disposizione circolare del fascio, e il giudizio di confronto circa la concordanza o discordanza di verso si istituisce in base al carattere proiettivo di siffatta disposizione circolare. Lo svolgimento completo di siffatte considerazioni si troverà nei *Fondamenti di Geometria* del VERONESE (1), che per primo diede ad essa un assetto rigoroso.

Dal punto di vista attuale, invece, la teoria dei versi dello spazio si potrà svolgere secondo un piano analogo a quello da noi indicato per la teoria dei versi del piano. Ma poichè la trattazione risulterebbe alquanto prolissa, a noi basterà l'avervi accennato (2). E finiremo con l'osservare che la considerazione dei versi elicoidali permette di distinguere, nella teoria della uguaglianza delle figure spaziali, l'*uguaglianza diretta* dall' *uguaglianza inversa* (3).

§ 47. I postulati di appartenenza e di ordine nella Geometria proiettiva. — Con ciò il programma elementare, che ci eravamo proposti, è esaurito. Tuttavia, a lumeggiare da un punto di vista più elevato le considerazioni svolte fin qui, e a preparare qualche ulteriore sviluppo critico che troverà posto negli articoli seguenti, giova rilevare quale significato assumano i postulati re-

(1) Pagg. 412, 443. Si veda anche la Nota di BEPPO LEVI citata alla p. 78, nota 2.

(2) Uno schema di siffatta trattazione si troverà nella più volte citata 1ª edizione degli *Elementi di Geometria* ecc., di F. ENRIQUES e nostri.

(3) Cfr. la Nota di BEPPO LEVI citata alla p. 78, nota 2.

Digitized by Google

lativi alla retta e al piano, per riguardo alla Geometria proiettiva, e come se ne modifichi la forma, per l'introduzione che qui occorre di fare degli *elementi impropri*, cioè di punti, rette e piano *all'infinito*.

Invero si deve dire che la rigida discriminazione dei due gruppi di postulati di appartenenza e di ordine, coll'eliminazione di ogni concetto (metrico) attinente alla *congruenza* o al *movimento* delle figure, risponde appunto a quella considerazione più astratta delle figure geometriche, che nasce fissando l'attenzione sulle proprietà invarianti per proiezioni e sezioni, e che ci porta dallo spazio (metrico) ordinario allo spazio proiettivo.

Ricordiamo le grandi linee di questo sviluppo d'idee, caratteristico della geometria moderna (1).

E diciamo anzitutto che esso muove da una veduta di continuità, tendente ad unificare la concezione delle figure geometriche, che appare troppo frammentaria nelle distinzioni a cui rimangono costretti i geometri greci. Il DESARGUES (1639) e il PASCAL (1640), hanno per primi l'idea di studiare le sezioni coniche in modo uniforme, come proiezioni del cerchio: a questa stessa idea si riattacca la generazione *per umbras* delle curve di terz'ordine, dovuta al NEWTON.

Ora l'anzidetta considerazione delle coniche dal punto di vista delle proprietà (proiettive) che si conservano per proiezioni e sezioni, induceva anche il DESARGUES a introdurre la nozione del punto all'infinito della retta, che più esplicitamente dopo di lui il LEIBNIZ riattaccava a nozioni di continuità: e tuttavia bisogna attendere oltre un secolo e mezzo, fino al PONCELET, per trovare sviluppata tale considerazione col rilievo che i punti all'infinito del piano debbono ritenersi appartenere ad una retta e tutti i punti all'infinito dello spazio debbono similmente riguardarsi appartenenti ad un piano.

I nuovi metodi geometrici del DESARGUES e del PASCAL (rimasti in ombra di fronte al rapido sviluppo della geometria analitica o coltivati solo da geometri di second'ordine come il DE LA HIRE e il LE POURE), vengono a maturazione in Francia, al principio del secolo decimonono, nella scuola del MONGE (il creatore della Geometria descrittiva), per opera di CARNOT, BRIANCHON.... e segnatamente del PONCELET, che nel 1822 pubblica il *Traité des pro-*

(1) Cfr. il Cenno storico-critico che chiude l'Appendice alle *Lezioni di Geometria proiettiva*, di F. ENRIQUES, 4ª ed., Bologna, Zanichelli, 1920.

Digitized by Google

priétés projectives des figures. Qui la Geometria viene tutta veduta al lume di un principio di continuità, e la ricerca sistematica delle proprietà proiettive (che per il PONCELET sono specialmente relazioni metrico-proiettive) è perseguita col metodo caratteristico della riduzione della figura a casi particolari sotto l'aspetto metrico, mediante opportune proiezioni.

§ 48. — La scienza nuova, così fondata, si svolge soprattutto attraverso il *Barycentrische Calcul* del MÖBIUS (1827) e la *Systematische Entwickelung....* dello STEINER (1832). Al MÖBIUS appartiene la considerazione delle più generali corrispondenze, del piano e dello spazio, che lasciano invariate le proprietà proiettive delle figure, cioè delle *omografie*: trasformazioni che mutano le rette in rette e che, in rapporto alle ordinarie coordinate cartesiane (o anche a coordinate proiettive più generali, per cui le equazioni di piani e rette riescono lineari), sono rappresentate da equazioni lineari. Queste omografie appunto assumono, nella Geometria proiettiva, il posto che spetta ai movimenti nella Geometria elementare.

Lo STEINER, particolarmente dallo studio della generazione proiettiva delle coniche, è tratto a considerare la proiettività fra rette (punteggiate) ovvero fra fasci di raggi o di piani, cioè, in genere, fra forme di prima specie.

In questa teoria è fondamentale il fatto che « la proiettività fra due forme di prima specie è determinata da tre coppie di elementi omologhi, assumibili ad arbitrio ». In primo luogo è facile passare, per esempio, da una retta a ad un'altra a', in guisa che tre punti A, B, C vadano ordinatamente in altri tre punti dati A', B', C'; ed in secondo luogo si riconosce che questo riferimento mediante proiezioni e sezioni, riesce così univocamente determinato, perchè ogni proiezione lascia invariato il *birapporto* (o *rapporto anarmonico*) di quattro punti $ABCD$, il quale vale a definire il quarto punto della quaterna in funzione dei primi tre.

Ora, quando si è stabilita la proprietà di determinazione delle proiettività fra forme di prima specie, è anche facile dedurne la determinazione dell'omografia fra due piani, per mezzo di quattro coppie di punti omologhi indipendenti (e così dell'omografia spaziale per mezzo di cinque coppie), purchè si sappia che la corrispondenza, subordinata dall'omografia, fra due rette omologhe, equivale ad un riferimento mediante proiezioni e sezioni, o — ciò che è lo stesso — che essa conserva il valore del birapporto di

Digitized by Google

quattro punti qualsiansi. Ma a questa conclusione si giunge, ammettendo la continuità della corrispondenza, mercè la proprietà grafica che permette di definire un gruppo $ABCD$ *armonico* (per cui il birapporto $[ABCD] = -1$): cioè l'esistenza di un quadrangolo completo di cui due lati passano per A, due per B, uno per C e uno per D; infatti è chiaro che l'omografia fra due piani dovrà trasformare sempre un quadrangolo completo (costruttore di un gruppo armonico $ABCD$) in un quadrangolo completo (che mostrerà l'armonicità del gruppo omologo $A'B'C'D'$).

§ 49. — Le cose che qui abbiamo ricordato acquistano speciale importanza riguardo all'ultimo periodo critico, in cui la Geometria proiettiva, per opera dello STAUDT (1), riceve uno sviluppo affatto indipendente dalle nozioni metriche.

Questa elaborazione critica della scienza è dominata dal pensiero che, in un ordine d'idee in cui le figure proiettive appaiono come uguali, vi deve essere una trattazione naturale per cui lo studio delle loro proprietà presenti per tutte difficoltà uguali, senza che si abbia vantaggio o differenza alcuna pel ricorso a casi particolari metrici. A tal uopo converrà distinguere sistematicamente le proprietà grafiche o ottiche dalle proprietà metriche, e ordinare, con criterio puristico, lo sviluppo delle prime, formando così un corpo di dottrina — la Geometria proiettiva nel senso proprio della parola — che rifletterà un grado più astratto dell'intuizione geometrica.

Lo STAUDT ha costituito appunto questa Geometria proiettiva pura, porgendo una trattazione grafica della teoria delle proiettività (fra forme di 1ª, 2ª e 3ª specie) e svolgendone le applicazioni allo studio delle forme superiori, come le coniche ecc.

In quest' ordine d' idee s' incontrano due questioni fondamentali:

1) riconoscere, senza far uso del birapporto, il teorema che la proiettività fra due rette (o forme di prima specie) è determinata da tre coppie di punti (elementi) omologhi;

2) stabilire ciò che vi è d'arbitrario nella determinazione dell'omografia fra piani (cioè che l'omografia riesce determinata da quattro coppie di punti corrispondenti).

Ora lo studio della seconda questione porta a considerare la corrispondenza subordinata dall'omografia piana fra le rette omo-

(1) *Geometrie der Lage*, 1847, trad. ital., Bocca, 1889.

Digitized by Google

loghe, la quale — come già notammo — conserva i gruppi armonici; e siccome anche le proiezioni e sezioni posseggono la medesima proprietà, lo STAUDT è stato tratto a dare una definizione apparentemente più generale della proiettività fra rette (o fra forme di prima specie), non più come riferimento mediante proiezioni e sezioni, ma come « corrispondenza armonica », cioè conservante i gruppi armonici. Allora la seconda delle questioni fondamentali sopra enunciate, si riconduce formalmente alla prima, che tuttavia acquista qui un contenuto più significativo: si tratta di dimostrare che la corrispondenza armonica fra due rette (*la proiettività* nel senso staudtiano) è determinata da tre coppie di punti omologhi; ovvero — riducendosi per proiezione ad una sola retta su cui si abbiano tre punti uniti — che « sopra la retta una proiettività dotata di tre punti uniti, si riduce all'identità ». Questa proposizione appunto costituirà il *teorema fondamentale* della Geometria proiettiva. Da essa scaturirà, non solo la teoria delle proiettività fra forme di prima specie, ma anche quella dell'omografia fra piani (e quindi delle proiettività, omografie e correlazioni, fra forme di seconda e poi di terza specie): dalla quale resulta in particolare che la corrispondenza omografica fra due piani punteggiati è sufficientemente definita dalla condizione di trasformare le rette in rette, tenendo conto della continuità del piano, senza che occorra aggiungervi l'ipotesi della continuità della corrispondenza, che ne consegue logicamente.

§ 50. — Lo STAUDT, elevando su tali basi l'edifizio della Geometria proiettiva, ha messo in luce che questo corpo di dottrina dipende soltanto dalle proprietà grafiche pertinenti, in certo senso, alla nostra intuizione visiva. La critica dopo di lui si è adoperata a formulare con esattezza i postulati che traducono, e nel loro insieme valgono a distinguere e caratterizzare codesta forma più astratta dell'intuizione spaziale, sui quali si asside la Geometria proiettiva. Quest'analisi, svolta da KLEIN, LÜROTH, ZEUTHEN, PASCH, DE PAOLIS ed ENRIQUES, conduce da una parte a riconoscere che la fondazione della Geometria proiettiva si riduce ad introdurre nello spazio un sistema di coordinate proiettive, cioè tali che piani e rette siano rappresentati da equazioni lineari, e d'altra parte si conclude in una esposizione logica sistematica della scienza, quale si vede nelle citate *Lezioni di Geometria proiettiva* dell'ENRIQUES.

Digitized by Google

Qui ci limiteremo a rilevare la nuova forma che — come si è detto — occorre dare ai postulati di appartenenza e di ordine, caratterizzanti i rapporti grafici di rette e piani, in seguito all'introduzione degli elementi impropri (all'infinito).

§ 51. — Le proprietà di appartenenza di punti, rette e piani, diventano nella Geometria proiettiva molto semplici e simmetriche, giacchè la convenzione per cui si viene a ritenere come un *punto improprio* la direzione di una retta (e la conseguente introduzione delle rette improprie e del piano improprio), traducendo in un nuovo linguaggio l'unicità della parallela per un punto ad una retta data, vale a rimuovere ogni eccezione nelle proposizioni relative all'intersecarsi di rette e piani. Così, ai postulati I, II, III, indicati innanzi (nel § 21) si ha da aggiungere quello che *un piano ed una retta non giacente in esso hanno un punto comune*, da cui seguirà che *due piani hanno sempre una retta comune* e che *due rette giacenti in un piano hanno un punto comune.*

Pertanto si può assumere come primo gruppo di postulati della Geometria proiettiva un gruppo di proprietà (a dir vero sovrabbondante) in cui il « punto » e il « piano » figurano simmetricamente, e che sono i postulati messi a base della Geometria proiettiva dall' ENRIQUES (e da lui riassunti colla nomenclatura delle forme di 1ª, 2ª e 3ª specie).

Primo gruppo di postulati della Geometria proiettiva.

Due punti appartengono ad una retta ben determinata.	Due piani hanno comune una retta ben determinata.
Tre punti, non in linea retta, appartengono ad un piano determinato.	Tre piani, non passanti per una retta, hanno un punto comune.
Una retta e un punto fuori di essa determinano un piano a cui appartengono.	Un piano e una retta fuori di esso hanno un punto comune.

§ 52. — Quanto al secondo gruppo di postulati, basti rilevare che — per l'aggiunta del punto improprio — la retta dello spazio proiettivo si presenta, al pari del fascio di rette e al fascio di piani, come una forma *chiusa*, per riconoscere che le sue proprietà lineari sono quelle stesse di cui si è già fatto cenno al § 26,

Digitized by Google

e che — dal punto di vista genetico — si possono formulare adottando (al posto del post. IV*a*) il postulato:

IV'. *I punti d'una retta sono dati in una disposizione circolare naturale, che ha due sensi, l'uno inverso dell'altro, per modo che*:

1) Prefissato sulla retta uno di codesti due sensi e dato un qualsiasi punto A esiste un ordine naturale della retta, che ha il senso prefissato e il punto A come primo elemento nel quale:

a) di due punti B, C sempre l'uno, per es. B, precede l'altro (e allora C segue B);

b) se B precede C e C precede D, B precede D;

c) tra due punti B, C esistono infiniti punti intermedi;

d) non esiste un ultimo punto.

2) I due ordini naturali della retta che hanno lo stesso primo elemento e senso inverso sono l'uno inverso dell'altro.

3) Due ordini della forma, che hanno lo stesso senso e diversi primi elementi, rispettivamente A e B, si deducono l'uno dall'altro colla permutazione circolare che porta A in B.

Dopo ciò la proprietà superficiale del piano, relativa alle *linee* rette, può essere caratterizzata, da un punto di vista genetico, ammettendo semplicemente il seguente postulato:

V. *La disposizione circolare naturale dei punti di una retta ha carattere proiettivo*, nel senso che, punti susseguentisi d'una retta si mutano, per una proiezione, in punti susseguentisi. Questa proprietà che vale solo colla restrizione del post. V*a*, 4° (§ 48) quando il susseguirsi dei punti sulla retta è concepito rispetto all'ordine naturale della retta ordinaria (priva di punto improprio), diventa valida senza eccezione essendosi adottato il concetto più ampio degli ordini naturali inerenti alla disposizione circolare della retta, come linea chiusa.

§ 53. — Dai due gruppi di postulati (di *appartenenza* e di *ordine*) del § 52, discende tutta una serie di proposizioni proiettive, fra le quali va rilevato come primo risultato saliente il *teorema dei triangoli omologici*, del DESARGUES: *Se due triangoli senza elementi comuni e giacenti in uno stesso piano, sono riferiti in modo che le tre coppie di lati omologhi determinino tre punti allineati, le tre congiungenti i vertici omologhi passano per uno stesso punto; e viceversa.*

Questo teorema, sulle tracce dello STAUDT, si può dimostrare con un procedimento spaziale, in cui si fa uso esclusivamente dei

Digitized by Google

postulati di appartenenza I'-III'. Ora il KLEIN ha bene scorto la notevole circostanza che codesto ricorso a costruzioni spaziali è, nella dimostrazione (proiettiva) del teorema del DESARGUES, *inevitabile*, cioè che esso non può dedursi semplicemente dalla proprietà del sistema delle rette di formare nel piano un sistema di linee, tale che per due punti passi *una* linea e due linee del sistema si seghino in un punto. A vero dire il KLEIN ha dimostrato soltanto l'impossibilità di fondare il teorema del DESARGUES in una regione limitata del piano proiettivo, sicchè potrebbe restare il dubbio che la dimostrazione possa compiersi usufruendo del piano completo. Ma lo HILBERT, più tardi, ha colmato la lacuna, sostituendo alla giustificazione che del suo asserto il KLEIN aveva tratto da considerazioni di Geometria differenziale sulle superficie, una dimostrazione elementare, costruendo una Geometria convenzionale del piano completo, in cui sono validi tutti i postulati della Geometria proiettiva piana, mentre il teorema del DESARGUES cade in difetto. Lo stesso HILBERT ha poi rilevato che codesto teorema diventa dimostrabile nel piano quando ai postulati della Geometria proiettiva (piana) si aggiungano quelli della *congruenza* e che, per converso, il teorema del DESARGUES, aggiunto ai postulati piani della appartenenza e dell'ordine, sostituisce interamente ai fini della Geometria proiettiva del piano, ogni possibile uso di costruzioni spaziali.

§ 54. — Al teorema del DESARGUES si riattacca, come conseguenza pressochè immediata, l'analogo *teorema dei quadrangoli omologici*, al quale, nell'ordine di sviluppo staudtiano della Geometria proiettiva, spetta l'ufficio essenziale di legittimare la nota definizione del *quarto armonico* D, dopo tre punti A, B, C di una punteggiata, mediante un quadrangolo completo; in quanto esso permette appunto di assodare la indipendenza di codesta definizione dalla scelta particolare del quadrangolo generatore del gruppo armonico.

Ulteriori e più sottili argomentazioni richiede, a questo punto, la dimostrazione che D è veramente un *quarto* punto, distinto da A, B, C (se tali son questi tre fra loro) e che, più precisamente, C e D separano A e B.

Nell'ordine storico non è inutile ricordare che, in quanto nella dimostrazione data dallo STAUDT per quest'ultimo asserto si era rilevato l'intervento di concetti metrici e nella dimostra-

Digitized by Google

zione successivamente proposta dal PASCH si era riscontrata una, pur riposta, lacuna, si pensò un tempo che l'accennata affermazione presupponesse qualche ulteriore postulato proiettivo. Ma l'ENRIQUES nel 1894 fornì una dimostrazione ineccepibile, fondata esclusivamente sui postulati poc'anzi enunciati e, più precisamente, sul carattere proiettivo della disposizione circolare naturale della retta.

§ 55. — Dopo avere così riconosciute le proprietà elementari dei gruppi armonici, si può dare, con lo STAUDT, la definizione della proiettività fra rette (o fra forme di prima specie) come corrispondenza armonica, e si tratta di stabilire il teorema fondamentale della proiettività, di cui si è discorso innanzi.

A tal uopo si può procedere secondo due vie:

1) La prima muove dal considerare sopra la retta il *sistema armonico*, che si ottiene con costruzioni lineari (o di quarti armonici) a partire da tre punti dati: il teorema fondamentale resulta dimostrato ove si faccia vedere che codesto sistema di punti è ovunque denso sopra la retta, per modo che tutti i punti della retta che non vi appartengono sono definiti in rapporto ad esso come punti limiti.

Questa via che trovasi svolta, per esempio, dal DE PAOLIS fa dipendere in sostanza la costruzione del nostro edifizio geometrico, dalla estensione proiettiva del procedimento della misura, ossia dall'introduzione delle coordinate proiettive.

2) La seconda via (che è seguìta nelle *Lezioni* dell'ENRIQUES) ricostruisce, in forma logicamente compiuta, il ragionamento abbozzato dallo stesso STAUDT. Occorre anzitutto riconoscere che la proiettività (corrispondenza armonica) fra rette è una corrispondenza ordinata (cioè che muta punti susseguentisi in punti susseguentisi); e poi che, se si hanno, sopra la retta, tre punti uniti — nell'ipotesi che la proiettività non sia identica — si dovrebbero trovare anche due punti uniti estremi di un segmento in cui non cadano altri punti uniti: il che porta tosto ad un assurdo.

Ma, così l'una come l'altra delle vie sopra indicate, debbono fare appello all'intuizione della continuità della retta, e quindi completare i postulati dell'ordine introducendo appunto esplicitamente questo principio di continuità, come lo studioso vedrà fatto nell'Articolo Quinto.

Digitized by Google

ARTICOLO TERZO

Della Congruenza e del Movimento, di ALFREDO GUARDUCCI a Prato.

§ 1. **La trattazione Euclidea.** — In EUCLIDE la *congruenza* (uguaglianza di forma) e l'*equivalenza* (uguaglianza di grandezza) delle figure geometriche non vengono distinte; sotto il nome di uguaglianza, l'Autore considera generalmente la relazione di grandezza, limitandosi ad affermare inoltre la uguaglianza dei segmenti e quella degli angoli che, verificandosi nel caso dei poligoni, servono a caratterizzarne la congruenza.

Volendo staccare dall' EUCLIDE quella parte della teoria dell'eguaglianza che si riferisce alla congruenza, prenderemo in esame il contenuto delle principali proposizioni del Libro I concernenti i triangoli (1). E (tralasciando le costruzioni accessorie) ne distingueremo due gruppi:

il 1° gruppo, di cui soltanto più tardi rileveremo l'ufficio, comprende le proposizioni I, II, III.

il 2° gruppo è costituito dalle proposizioni IV, V, VI, VII, VIII, XVI e XXVI.

A questi due gruppi di proposizioni se ne può aggiungere un terzo formato delle proposizioni XI, XII, XIII, XIV e XV contenenti i principî della teoria delle perpendicolari.

Nel 2° gruppo si trovano tre criterî fondamentali per la congruenza dei triangoli:

triangoli che hanno due lati rispettivamente eguali e gli angoli compresi eguali (prop. IV);

triangoli che hanno i lati rispettivamente eguali (prop. VIII);

triangoli che hanno due angoli rispettivamente eguali ed un lato eguale ad un lato (prop. XXVI).

(1) Abbiamo tenuto sott'occhio il testo edito da HEIBERG, Lipsia, 1883.

Digitized by Google

La prop. IV è stabilita ricorrendo alla sovrapponibilità delle due figure col movimento.

Nella successiva è dimostrata la eguaglianza degli angoli alla base nel triangolo isoscele. Se ABC è il triangolo (fig. 1) e $AB = AC$, si prende sul prolungamento di AB un punto qualunque D, e si fa $AE = AD$ (vedi prop. III). Allora si ha tr. $CAD =$ tr. BAE, $DC = EB$, $\widehat{DCA} = \widehat{EBA}$, $\widehat{ADC} = \widehat{AEB}$. Quindi ancora tr. $DCB =$ tr. EBC, $\widehat{DCB} = \widehat{EBC}$, $\widehat{DBC} = \widehat{ECB}$. E da $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$, $\widehat{CBE} = \widehat{BCD}$ segue per sottrazione $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

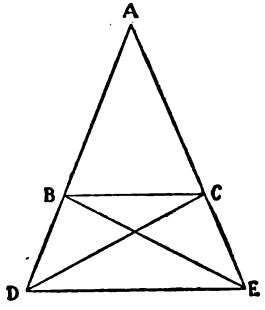


Fig. 1.

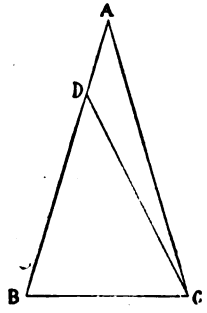


Fig. 2.

La prop. VI è l'inversa della precedente ed è dimostrata per assurdo. Se nel triangolo ABC (fig. 2) è $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, sia, se è possibile, per es. $AB > AC$. Fatto allora (prop. III) $BD = AC$, il triangolo ABC sarebbe eguale alla sua parte DBC.

Come conseguenza della uguaglianza degli angoli alla base del triangolo isoscele si dimostra per assurdo nella proposizione VII non potersi costruire sulla stessa base e dalla medesima parte di questa due triangoli aventi respettivamente eguali i due lati concorrenti nell'uno e nell'altro estremo della base comune.

Se ne deduce poi per assurdo nella proposizione successiva, ricorrendo anche qui alla sovrapponibilità delle due figure col movimento, il 2° criterio di congruenza dei triangoli (eguaglianza dei tre lati).

Il 3° criterio (eguaglianza di due angoli ed un lato) è contenuto in tutta la sua generalità nella prop. XXVI la quale comprende il caso in cui gli angoli respettivamente eguali siano quelli adiacenti al lato eguale e quello in cui gli angoli stessi siano uno adiacente e l'altro opposto al detto lato.

Digitized by Google

Per il primo caso (fig. 3), supposto $BC = EF$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$, se fosse p. es. $AB > DE$ si farebbe (prop. III) $BH = ED$ e si troverebbe (prop. IV) triangolo HBC = tr. DEF, $\widehat{HCB} = \widehat{DFE}$; quindi $\widehat{ACB}$ eguale alla sua parte $\widehat{HCB}$. Si conclude così $AB = DE$, donde l'eguaglianza dei triangoli dati. Per il secondo caso (fig. 3), supposto $BC = EF$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$, si procede in modo analogo; ammettendo che sia $AB > DE$, si conclude $\widehat{BHC} = \widehat{BAC}$, il che contradice alla prop. XVI.

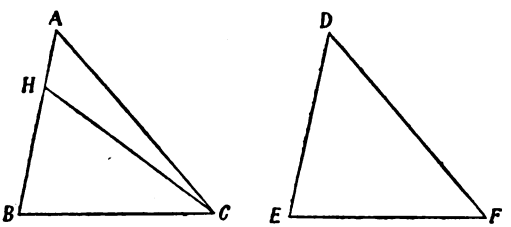


Fig. 3.

Gli sviluppi accennati, fatta astrazione dai principî, che prenderemo in esame più tardi, dànno luogo ad alcune osservazioni che permettono di vedere come, nell'ordine d'idee euclideo, si presentino possibili altri assetti della teoria della congruenza, accolti in diversi trattati scolastici:

1° l'eguaglianza degli angoli alla base nel triangolo isoscele si può dare come corollario immediato del teor. 4°, considerando cioè i due triangoli eguali (sovrapposti, BAC, CAB (fig. 1);

2° la prima parte del 3° criterio di congruenza dei triangoli (eguaglianza di un lato e dei due angoli adiacenti) si può stabilire per sovrapposizione, e di qui dedurre poi la prop. VI;

3° il 2° criterio (prop. VIII) si può dedurre (per assurdo) dalla disuguaglianza data nella prop. XXIV, quando si ammetta il trasporto dell'angolo che Euclide effettua costruttivamente nella prop. XXIII.

Relativamente ai principî utilizzati nel testo Euclideo, si noti:

1° il principio di sovrapponibilità viene adoperato soltanto nella dimostrazione dei due primi criterî d'eguaglianza dei triangoli (Libro I, prop. IV e VIII) e per dimostrare la eguaglianza di due segmenti di circolo simili situati sopra segmenti rettilinei eguali (Libro III, prop. XXIV). A questo principio si dovrebbe

Digitized by Google

però ricorrere anche nella prop. XV se si volesse giustificare l'eguaglianza degli angoli retti che EUCLIDE accetta come postulato;

2° le proposizioni I, II, III, del Libro I, rivelano un tentativo non completamente riuscito di fare a meno del movimento, riducendosi la relazione di eguaglianza di due segmenti al caso in cui abbiano un estremo in comune e sostituendo al *trasporto* la costruzione mediante intersezione di rette e cerchi.

Accenneremo qui finalmente ad un altro importante criterio di congruenza dei triangoli che, almeno nella sua generalità, non è registrato nel testo euclideo:

« Due triangoli che hanno due lati e l'angolo opposto al maggiore di essi rispettivamente eguali, sono eguali ».

Il teorema si dimostra facilmente per assurdo riducendolo al primo criterio e basandosi sulla proprietà dell'angolo esterno del triangolo di esser maggiore di ciascuno degli angoli interni opposti (prop. XV, Lib. I). Se ne deducono subito i corollari seguenti:

1° Due triangoli rettangoli che hanno l'ipotenusa ed un cateto rispettivamente eguali sono eguali (1).

2° Due triangoli ottusangoli che hanno eguali gli angoli ottusi, i lati opposti a questi angoli, ed altri due lati, sono eguali.

Non è vero in generale il teorema analogo per il caso che gli angoli supposti eguali nei due triangoli siano acuti; basta però aggiungere una condizione restrittiva per gli angoli opposti alla seconda coppia di lati eguali per avere un altro teorema generale la cui dimostrazione è analoga a quella del precedente e che è valido anche per i triangoli acutangoli. Si dimostra cioè che « se due triangoli hanno rispettivamente eguali due lati e l'angolo opposto al primo di questi due lati, essi sono eguali, purchè l'angolo opposto al secondo lato sia in tutti e due i triangoli o acuto, o retto, o ottuso ».

§ 2. **Il significato della congruenza.** — Il tentativo cui abbiamo sopra accennato relativamente alle prop. I, II e III del Lib. I rivela nell'autore degli *Elementi* la coscienza che il ricorrere alla sovrapponibilità col movimento delle figure geometriche costituisse un difetto; e tanto più codesto difetto doveva apparir-

(1) Nel dimostrare la prop. XIV del Lib. III, EUCLIDE ha occasione di dare questo teorema, e stabilisce l'eguaglianza degli altri cateti mediante la teoria dell'equivalenza.

Digitized by Google

gli saliente, perchè il concetto di eguaglianza, preso da EUCLIDE (senza spiegazione) come un semplice rapporto logico inerente agli oggetti che appartengono alla *categoria delle quantità*, veniva così a legarsi, nella applicazione concreta, ad un'operazione fisica.

Aggiungasi che tale operazione fisica (il *trasporto*) usciva dall'ambito di quelle elementari costruzioni, date dai più semplici istrumenti, che i Greci postulavano come fondamento dell'esistenza delle figure (1).

Nello sviluppo critico della Geometria successivo ad EUCLIDE, avvertita la chiara distinzione fra uguaglianza di forma (congruenza) e uguaglianza di grandezza (equivalenza), si sono manifestate nei riguardi della congruenza due tendenze fondamentali che, ciascuna per un lato, si possono riattaccare alle vedute euclidee:

considerare la uguaglianza (congruenza) come un *puro rapporto logico*;

ritenerla invece come una *relazione fisica* desunta dal *movimento dei corpi solidi*.

La prima tendenza ha avuto la sua più netta espressione in quella veduta che confonde l'uguaglianza colla *identità*, secondo la quale cioè «due figure geometriche sono uguali, se dell'una si può dire tutto ciò che si dice dell'altra».

In altre parole l'eguaglianza di due figure A, A' consisterebbe in questo, che *tutte* le proprietà di A appartengono anche ad A' e viceversa; mentre come è già stato osservato, per es., dallo STOLTZ, due figure congruenti geometricamente hanno proprietà diverse, in relazione alla loro diversa posizione nello spazio nel quale si considerano come contenute (paragonate ad una *stessa* figura).

La definizione precedente non reggerebbe d'altronde neppure quando la si volesse restringere alla identità delle proprietà *interne* delle due figure. In questo caso non si saprebbe invero come distinguere l'uguaglianza dalla similitudine.

La vacuità delle definizioni che attribuiscono alla congruenza il carattere d'un puro rapporto logico, scaturisce d'altronde dalla necessità in cui ci troviamo ad ogni modo di aggiungere alla pretesa definizione logica la nozione di qualche carattere reale, che permetta di riconoscere concretamente l'uguaglianza delle figure.

Le osservazioni precedenti vengono completate dalla più re-

(1) Cfr. H. G. ZEUTHEN, *Die geometrische Construction als Existenzbeweis in der antiken Geometrie.* «Mathematische Annalen», 1896.

Digitized by Google

cente critica logica intorno al significato generale delle *relazioni d'uguaglianza*.

Risulta da codesta critica che una uguaglianza fra due oggetti A, B, significa che questi furono *associati* in una classe (A, B....) dalla quale si è costruito il concetto astratto O (= A o B o ....); essere A uguale a B denota appunto la « sostituibilità di A a B rispetto ad O » (1).

Così l'uguaglianza ha sempre un senso relativo ad un'associazione ed astrazione che si suppone eseguita; p. es. si dice:

Tizio = Caio *in quanto uomini*

oppure

uomo = cane *in quanto animali* ecc.

Consegue da ciò che ogni eguaglianza è una relazione, soddisfacente a certe proprietà formali (quelle che il De Morgan chiama proprietà *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*) ed avente un significato fisico, il quale viene determinato assegnando le condizioni sotto cui vengono associati gli oggetti, che si prendono come eguali.

L'uguaglianza geometrica in particolare, ha un significato fisico che emerge dalla similarità delle sensazioni inerenti a certi oggetti per riguardo alle diverse posizioni possibili dell'osservatore; in altri termini, essa resta fisicamente determinata per mezzo della invarianza rispetto al movimento dei corpi solidi. Questa veduta, rispondente alla seconda delle tendenze sopra accennate, ha trovato in Helmholtz il suo illustre sostenitore.

§ 3. **Analisi del concetto di movimento.** — Resta da vedere in qual modo le osservazioni precedenti possano utilizzarsi per una trattazione rigorosa della teoria geometrica della congruenza.

Alcuni chiari geometri (Hoüel, De Paolis ....), facendosi forti

(1) Questo significato dell'uguaglianza risulta indirettamente dall'analisi delle così dette *definizioni per astrazione* di Grassman, Helmholtz, Peano, Vailati, per le quali si determina un concetto astratto (per es. la temperatura, la direzione, il valore, ecc.) stabilendo quali oggetti siano da ritenersi eguali rispetto ad esso (cioè definendo le frasi « corpi ugualmente caldi », « rette di ugual direzione », « merci equivalenti » ecc.). Uno studio delle questioni logico-psicologiche che si riattaccano al concetto dell'uguaglianza (e in ispecie al rapporto fra le sue proprietà formali e i principî e gli assiomi logici) si trova nel 3° cap. dei *Problemi della Scienza* di F. Enriques, 2ª edizione, Bologna, Zanichelli, 1910. Cfr. anche dello stesso A., *Per la storia della logica*, Bologna, 1922.

Digitized by Google

dell'autorità di HELMHOLTZ, hanno sostenuto la convenienza di definire come uguali o congruenti figure *sovrapponibili col movimento*, postulando esplicitamente che « le figure geometriche si possono muovere portando un loro punto in una posizione prefissata, una retta per il punto, ecc. ».

Questo modo di esposizione, didatticamente assai semplice, non può, così preso, ritenersi conforme alle esigenze di un assetto logico della Geometria. Infatti l'idea del movimento geometrico in tal modo introdotta come primitiva, non può rigorosamente figurare nei postulati, se non analizzata nei suoi elementi, in guisa che le ipotesi accolte intorno ad essa abbiano un senso formale, adoperabile senza ricorrere, nei ragionamenti, all'interpretazione più o meno nascosta, di esperienze fisiche, effettive o idealizzate.

D'altronde questa analisi del concetto di movimento è stata iniziata da HELMHOLTZ stesso e, proseguita da S. LIE, ha condotto ad una chiara veduta del contenuto logico dei postulati che vi si riferiscono. Citiamo soltanto i resultati.

In quanto si pensi ad una figura idealmente estesa, il movimento di essa, riguardata come solida, pone nello spazio (o in una regione di spazio) una *trasformazione* o *corrispondenza biunivoca puntuale*.

I vari movimenti possibili dànno luogo ad un insieme di trasformazioni che gode delle seguenti proprietà fondamentali, per le quali dicesi un *gruppo*:

1ª eseguendo successivamente due trasformazioni per movimento, si ottiene una trasformazione per movimento (*composta* delle due prime, o *prodotto* di esse);

2ª insieme ad ogni trasformazione per movimento esiste anche la trasformazione inversa.

Resta quindi soltanto da postulare il grado di libertà nella trasformazione delle figure che è consentito dai movimenti. HELMHOLTZ e LIE fanno ciò indipendentemente dai concetti di retta e di piano, che vengono quindi definiti (1), e riescono a mostrare la possibilità di costruire sopra le loro premesse tutto l'edificio geometrico, ricorrendo a sviluppi di analisi superiore.

Quando si prendano come dati i concetti di retta e di piano, la cosa è facilmente trattabile in modo elementare.

(1) In un ordine d'idee che si potrebbe riattaccare a quello di LOBATSCHEWSKY, BOLYAI (cfr. Art. BONOLA nella parte II).

Digitized by Google

In tal caso infatti, dopo avere premesso i postulati di appartenenza (cfr. Articolo Secondo, § 22) che considereremo costituire il *primo gruppo* delle nostre premesse, avremo da enunciare il seguente *Secondo gruppo di postulati*:

1° I movimenti dello spazio sono *trasformazioni puntuali costituenti un gruppo.*

2° In un movimento ogni retta si trasforma in una retta (e quindi ogni piano in un piano).

3° Con un movimento si può far corrispondere ad un punto A un punto arbitrariamente assegnato A', ad una semiretta a uscente da A una semiretta a' uscente da A', ad un semipiano α limitato da a un semipiano α' limitato da a'.

4° Se in un movimento restano fermi tre punti non in linea retta, tutti i punti restano fermi (cioè il movimento è *nullo*, o, in altri termini, si riduce alla *trasformazione identica*).

È chiaro come questi postulati contengano le premesse richieste dalla teoria euclidea dell'uguaglianza, ove si assuma la seguente

Definizione. — Due figure sono *congruenti* o *eguali* quando si lasciano trasformare l'una nell'altra mediante un movimento.

Il post. 1° — data la precedente nozione di gruppo — porta che la congruenza si possa considerare come un caso d'*uguaglianza* (uguaglianza geometrica) resultando verificate le condizioni logiche per cui:

a) ogni figura è uguale a se stessa (*proprietà identica* dell'uguaglianza, rispecchiante l'esistenza della trasformazione identica nel gruppo dei movimenti);

b) se una figura F è uguale a F', anche F' è uguale a F (*proprietà riflessiva*, rispecchiante la condizione che la trasformazione inversa d'un movimento è un movimento);

c) figure uguali ad una terza sono uguali fra loro (*proprietà transitiva* dell'uguaglianza, rispecchiante la proprietà che il prodotto di due movimenti è un movimento).

Il significato dei postulati precedenti si lascia meglio comprendere mercè un confronto colle premesse della Geometria proiettiva (1). Allora si può dire che i nostri postulati importano che « i movimenti sono omografie dello spazio, formanti un gruppo cui spettano certe proprietà determinative (enunciate nei post. 3° e 4°) ».

(1) Cfr. Enriques, *Lezioni di Geometria proiettiva*, Bologna, Zanichelli.

Digitized by Google

Ora nella geometria proiettiva, a traverso il teorema fondamentale della proiettività, si stabilisce che ogni omografia (caratterizzata dal trasformare rette in rette) pone fra le rette omologhe una corrispondenza ordinata, cioè muta *punti susseguentisi* in punti susseguentisi. Si comprende dunque che tale proprietà potrebbe dimostrarsi anche qui, sebbene si tratti per noi di rette riguardate come linee aperte (giusta il post. α), β) § 22 dell'Art. Secondo) anzichè come linee chiuse, quali esse divengono dopo l'introduzione del punto all'infinito.

Ma giova approfondire l'esame della particolarità cui vengono a soddisfare le omografie-movimenti per essere così prese come operanti, senza eccezione, sui punti propri. Dove — per semplicità di discorso — ammetteremo per un momento, che ai precedenti postulati si aggiunga quello (detto d'EUCLIDE) che porta l'unicità della parallela per un punto ad una retta data.

Accade dunque che le omografie-movimenti trasformano rette secanti in rette secanti e rette parallele in rette parallele, sicchè ai sensi della geometria proiettiva lasciano invariato il piano all'infinito, per il che diconsi *omografie affini*.

Vogliamo considerare più da vicino che cosa porti il sistema dei postulati precedenti quando ci si restringa alla geometria del piano.

A tal uopo riassumiamo anzitutto ciò che dànno i postulati di appartenenza e di ordine dell'Art. Secondo, per riguardo alla geometria del piano. Enunceremo le proprietà elementari di cui si tratta come costituenti un *primo gruppo di postulati della geometria piana*:

1) La **retta** è un insieme di infiniti punti.

2) I punti d'una retta sono ordinati secondo due **ordini naturali** l'uno inverso dell'altro: fra due punti vi sono sempre punti intermedi (che insieme ai due costituiscono un *segmento* della retta); non vi è alcun primo, nè alcun ultimo punto.

3) Il piano è un insieme di punti che contiene entro di sè più rette.

4) Due punti del piano determinano una retta (loro *congiungente*) che è contenuta nel piano.

5) Una retta r divide il piano in *due parti* (o *semipiani*) per modo che due punti (fuori di r) appartenenti alla medesima parte sono congiunti da un segmento che non ha punti comuni con r, mentre due punti di parte opposta sono congiunti da un seg-

Digitized by Google

mento che ha un punto comune con r (i punti di r si ritengono comuni alle due parti).

In base a questi postulati si ritengono stabilite le nozioni di *angolo* ecc. (cfr. Art. Secondo).

Dopo ciò riassumeremo (1) i postulati caratterizzanti il gruppo dei movimenti del piano, aggiungendovi senz'altro la supposizione che il movimento sia corrispondenza ordinata ed enunciandoli nel linguaggio della geometria proiettiva, conformemente alla seguente

Definizione. — Diremo *omografia affine* del piano una trasformazione che muta ogni retta p di esso in una retta p', e punti susseguentisi di p in punti susseguentisi di p'.

Segue dalla definizione che l'omografia affine trasforma sempre un semipiano in un semipiano e un angolo in un angolo.

Ed ecco ora il nostro *secondo gruppo di postulati* :

1) I **movimenti** del piano sono omografie affini formanti un gruppo.

2) Esiste un movimento ben determinato del piano che porta un punto (qualsiasi) P in un altro punto dato P', una semiretta p uscente da P in una semiretta p' uscente da P', e che trasforma un semipiano limitato dalla retta p in uno dei due semipiani limitati dalla p'.

Ora, definendo la *congruenza* o *uguaglianza* delle figure come « possibilità di corrispondenza in un movimento », siccome è detto sopra, vediamo anzitutto che il post. 2°) porge la

Proprietà di trasporto dell'angolo: esistono due angoli uguali ad un angolo dato, che posseggono come lato un raggio dato.

Vediamo ancora come si trasporti un segmento dato sopra una retta. È chiaro anzitutto che: a partire da un punto della retta, e da una parte di esso, esiste almeno un segmento uguale ad un segmento dato; ma, in conformità al post. 2°, parrebbe che di tali segmenti ne esistessero due; dimostreremo invece che questi coincidono in uno solo. Ciò resulta come conseguenza dal

Lemma. — Il movimento del piano che lascia fermi un punto ed una semiretta per esso, scambiando i due semipiani, lascia fermi tutti i punti della semiretta ed anche della retta a cui que-

(1) Seguiamo qui l'ordine d'esposizione dato nelle *Conferenze sulla geometria non euclidea* di F. Enriques, raccolte per cura di O. Fernandez, Bologna, Zanichelli, 1917.

Digitized by Google

sta appartiene. (Per tale proprietà esso dicesi un *ribaltamento* attorno a codesta retta; l'altro movimento, ottenibile mercè la ripetizione del precedente, che lascia fermi la semiretta e i due semipiani, è l'identità).

Dimostriamo il nostro lemma. Sia P un punto e p una semiretta uscente da esso, e pongasi che il movimento che lascia ferma p e scambia i due semipiani, porti per es. un punto Q di p in un punto successivo Q' (in rapporto coll'ordine di p che ha come primo elemento P); allora ai tre punti sesseguentisi P, Q e Q' corrispondono, nel nostro movimento, punti susseguentisi P, Q' e Q'', sicchè la ripetizione del movimento conduce da Q' a Q'', mentre — per il post. 2° — deve dare l'identità.

Or dunque dedurremo la

PROPRIETÀ DI TRASPORTO DEL SEGMENTO: sopra una retta esistono due segmenti uguali ad un segmento dato ed aventi un dato estremo, i quali giacciono da parti opposte di questo.

Per completare l'elenco delle proprietà fondamentali relative all'uguaglianza di segmenti e di angoli, occorre ancora dimostrare che:

Somme e differenze di segmenti o di angoli uguali sono uguali. Per brevità di discorso ci limiteremo al caso di due segmenti

$$AC = AB + BC, \quad A'C' = A'B' + B'C':$$

si tratta di provare che, se

$$AB = A'B', \qquad BC = B'C',$$

si deduce

$$AC = A'C'.$$

A tal uopo si considerino i due movimenti del piano che portano A in A' e la semiretta $p = AB$ nella semiretta $p' = A'B'$: essi inducono fra p e p' una medesima corrispondenza, nella quale al punto C deve corrispondere un determinato punto C_1. Ma è chiaro che C_1 deve coincidere con C', chè in caso diverso si contraddirebbe alla proprietà di trasporto del segmento BC, resultando $BC = B'C_1 = B'C'$. Segue che i nostri movimenti portano contemporaneamente A in A' e C in C', sicchè

$$AC = A'C' \qquad \text{c. d. d.}$$

Digitized by Google

Ora osserviamo che il post. 2° porge altresì i *due criteri d'uguaglianza dei triangoli*, dove siano uguali due lati e l'angolo compreso ovvero un lato e i due angoli adiacenti; dai quali segue il terzo criterio, dove i tre lati sono uguali: come si vedrà nel seguente paragrafo.

NOTA. — I postulati 1° e 2° conducono anche alle prime proprietà del *cerchio*, potendosi definire la *circonferenza* in base alla proprietà di trasporto del segmento, e dimostrandosi poi l'ordine chiuso dei punti di questa e la partizione del piano in una regione *interna* (detta cerchio) e in una regione *esterna*. Ma per giustificare le costruzioni euclidee occorre aggiungere un postulato relativo alle intersezioni di rette e cerchi (il segmento che congiunge un punto interno ed un punto esterno al cerchio sega il cerchio), o invero dedurre questo principio da un più generale postulato di continuità, relativo all'ordine dei punti della retta (cfr. Art. Quinto). Quando ciò sia fatto si perviene a stabilire tutto ciò che negli *Elementi* precede l'uso del postulato delle parallele; cioè le prime 27 proposizioni.

§ 4. **La congruenza presa come nozione primitiva.** — All'infuori dell'indirizzo che parte dall'analisi logica del concetto di movimento, un altro indirizzo ugualmente legittimo si presenta per fondare la teoria della congruenza geometrica.

Esso consiste nell'assumere come primitivo (senza definizione) il concetto stesso della congruenza fra figure in generale o fra alcune figure elementari, esprimendo analiticamente, mercè opportuni postulati, le proprietà che alla relazione stessa competono (desunte dal suo significato fisico) e che valgono anzi a caratterizzarla nei riguardi di trattazione geometrica.

A tale ordine d'idee appartengono i tre modi di trattazione di cui qui vogliamo render conto, quello di PASCH (1), quello di VERONESE (2), quello di HILBERT (3).

§ 5. **Il sistema di postulati di Pasch.** — PASCH considera come data la nozione di *congruenza* o *uguaglianza* per figure qualsiasi

(1) PASCH, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, 1882.

(2) VERONESE, *Fondamenti di Geometria*, Padova, 1891 e *Elementi di Geometria*, Padova, 1897, 1904.

(3) HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen, Leipzig, 1899.

Digitized by Google

composte di un numero finito di punti A, B, C,... A', B', C',... Questa relazione fra le due figure può indicarsi colla notazione

$$ABC.... \equiv A'B'C'....$$

I postulati seguenti, a parte l'ordine e qualche lieve modificazione di forma, riproducono il contenuto essenziale di quelli di Pasch:

1) Una figura è congruente a se stessa.

2) Se una figura è congruente ad un'altra, anche la seconda è congruente alla prima.

3) Due figure congruenti ad una terza sono congruenti fra loro.

4) Le figure AB e BA sono congruenti.

5) Se $AB \equiv AC$, le figure BAC e CAB sono congruenti.

6) Se A, B, C, sono tre punti tali che C appartenga al segmento rettilineo AB, e le figure ABC, $A'B'C'$ sono congruenti, anche il punto C' appartiene al segmento rettilineo $A'B'$.

7) Se due figure $ABCD$..., $A'B'C'D'$..., sono congruenti, fra i punti di esse si può pensare una *corrispondenza* nella quale le figure costituite da gruppi di punti omologhi sono congruenti.

8) Date due figure congruenti F, F', se ad una di esse si aggiunge un punto P, anche alla seconda si può aggiungere un punto P' in guisa che le due nuove figure resultino ancora congruenti, e precisamente:

9) Sopra una retta a', e da una parte d'un punto A', si può determinare uno ed un solo punto B' tale che sia $A'B' \equiv AB$.

10) Data una terna di punti A, B, C, non in linea retta, e una coppia di punti A', B' tale che sia $A'B' \equiv AB$, in ogni piano per la retta $A'B'$ e da una parte di essa si può determinare uno ed un solo punto C in guisa che sia: $ABC \equiv A'B'C'$.

11) Data una quaterna di punti $ABCD$ non giacenti in un piano, non esiste alcun punto X distinto da D per cui sia:

$$ABCX \equiv ABCD$$

(vale a dire: data una terna di punti $A'B'C' \equiv ABC$, si può determinare in modo unico un punto D' pel quale resulti:

$$A'B'C'D' = ABCD).$$

Digitized by Google

Allo scopo di mostrare come questi postulati possano servire di base all'ordinaria teoria della congruenza, cominciamo dal definire la congruenza di segmenti e di angoli.

« *Due segmenti* AB, CD *si diranno congruenti quando sono congruenti le coppie* AB *e* CD »

Quanto agli angoli, premettiamo l'osservazione seguente:

Sia (ab) un angolo di vertice O, e sia O' un punto sulla retta a'.

Presi due punti A e B sui raggi a, b rispettivamente, e un punto A' sulla a' in modo che sia $O'A' \equiv OA$, determiniamo (post. 10°) il punto B' in guisa che sia

$$O'A'B' \equiv OAB.$$

Resta così determinato, col punto B', il raggio $O'B'$ che chiameremo b', e l'angolo $(a'b')$ di vertice O'. Se ora sui lati a, a' rispettivamente, prendiamo due punti C, C' in modo che sia $OC \equiv O'C'$, e sui lati b, b' due punti D, D' in modo che sia $OD \equiv O'D'$, è facile vedere che le due figure OCD, $O'C'D'$ sono congruenti. Infatti dal post. 10° segue subito che alla figura $O'A'B'$ si possono aggiungere i due punti X, Y in guisa da avere

$$O'A'B'XY \equiv OABCD$$

Ma dai postulati precedenti segue anche che X deve appartenere alla retta $O'A'$, e così pure Y alla retta $O'B'$; e segue che $O'X \equiv OC, O'Y \equiv OD$, donde si deduce che i punti X e Y coincidono rispettivamente con C' e D' e perciò $OCD \equiv O'C'D'$.

In base a questa osservazione, definiremo la congruenza di due angoli nel modo seguente:

« *Due angoli* (ab) (a'b') *di vertici* O O', *si diranno congruenti se, scelte sui loro lati due coppie di punti* A, B, *e* A', B' *rispettivamente, in guisa che sia* OA ≡ O'A' OB ≡ O'B', *ne risulta* OAB ≡ O'A'B' » (1).

Da quanto precede si ha subito:

a) Da una parte del raggio a', in un dato piano, vi è uno ed un solo raggio b' pel quale resulta l'angolo $(a'b')$ congruente ad un dato angolo (ab).

L'eguaglianza o congruenza di due triangoli si può definire

(1) In particolare, prendendo $OA = OB$ su a, b rispettivamente, dal post. 5° segue l'invertibilità dell'angolo.

Digitized by Google

come congruenza delle terne di vertici, e dedurne che i lati (segmenti o coppie di punti) sono congrui e così pure gli angoli.

Se ne traggono ora facilmente le tre proposizioni fondamentali sulla congruenza dei triangoli. Intanto dalla definizione, data sopra, di congruenza angolare, segue immediatamente che:

I. *Due triangoli sono congrui se sono rispettivamente congrui un angolo e i lati che lo comprendono.*

Dimostriamo ora che:

II. *Sono congrui due triangoli che hanno rispettivamente congrui un lato e i due angoli adiacenti.*

Siano i due triangoli ABC $A'B'C'$ che abbiano $AB \equiv A'B'$ $\widehat{CAB} \equiv \widehat{C'A'B'}$; $\widehat{CBA} \equiv \widehat{C'B'A'}$; dico che $ABC \equiv A'B'C'$. Infatti essendo $AB \equiv A'B'$, nel piano ABC e dalla stessa parte di AB dalla quale si trova il punto C, determiniamo un punto C'' in guisa che sia:

$$AC''B \equiv A'C'B'.$$

Dalla congruenza di queste due terne di punti, e dalla conseguente congruenza degli angoli da essi determinati, tenendo conto dell'ipotesi e della proposizione a, si conclude che i raggi AC'' BC'' non possono essere distinti dai raggi AC, BC rispettivamente, e che per conseguenza i punti C, C'' coincidono. Rimane dunque dimostrata la congruenza dei triangoli dati ABC, $A'B'C'$.

III. *Sono congruenti due triangoli se i lati dell'uno sono rispettivamente congruenti ai lati dell'altro.*

Siano i due triangoli ABC, $A'B'C'$ (fig. 4) che abbiano:

$$AB \equiv A'B' \quad AC \equiv A'C' \quad BC \equiv B'C';$$

dico che $ABC \equiv A'B'C'$

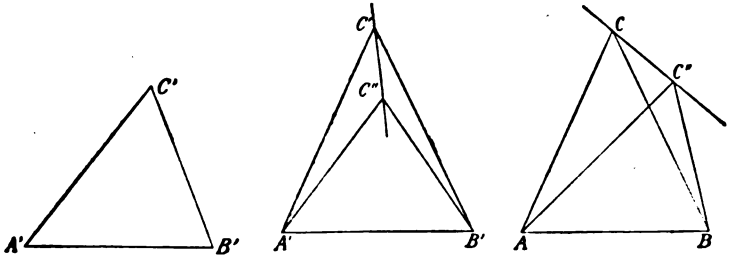


Fig. 4.

Digitized by Google

Infatti, poichè $AB \equiv A'B'$, nel piano ABC, e dalla stessa parte di AB dalla quale si trova il punto C, si può aggiungere (post. 10°) ad AB un punto C'' in guisa che resulti:

$$ABC'' \equiv A'B'C'.$$

Si avrà allora, tenendo conto anche dell'ipotesi,

$$AC \equiv AC'' \quad BC \equiv BC''.$$

Essendo poi (post. 5°).

$$CAC'' \equiv C''AC,$$

potrà aggiungersi alla figura $C''AC$ un punto B'' in modo che resulti:

m) $$C''ACB'' \equiv CAC''B.$$

Potrà darsi che nella figura $CAC''B$ i due punti A e B giacciano dalla stessa parte della retta CC'', oppure da parti opposte; ma poichè nella figura $C''ACB''$ i punti A B'' giaceranno anch'essi, nel primo caso, dalla stessa parte di CC'', e nel secondo da parti opposte, avremo che B e B'' giaceranno sempre dalla stessa parte di CC''.

Si ha d'altronde (post. 5°)

$$CBC'' \equiv C''BC$$

e, per la relazione m), anche

$$CBC'' \equiv C''B''C;$$

se ne conclude (post. 3°)

$$C''BC \equiv C''B''C$$

il che significa che i punti B, B'' coincidono. La relazione m) diventa allora:

$$C''ACB \equiv CAC''B$$

da cui

$$ACB = AC''B.$$

Dunque i punti C, C'' coincidono e i due triangoli dati sono congruenti.

Digitized by Google

Sarebbe facile ora dedurre da queste proposizioni il teorema sulla eguaglianza degli angoli alla base del triangolo isoscele, quello sull'angolo esterno, ecc. nonchè l'eguaglianza degli angoli opposti al vertice, le proposizioni sull'eguaglianza dei poligoni e così via. Ma quanto precede ci sembra sufficiente a dare un'idea dell'indirizzo a cui conducono i postulati di PASCH; e passiamo quindi a trattare brevemente del metodo di VERONESE.

§ 6. **Il sistema di Veronese** (1). — Uno dei principî fondamentali sui quali il VERONESE fonda l'edificio geometrico è quello di considerare la retta come la figura fondamentale della geometria per la costruzione delle altre figure.

Egli introduce come primitivo il concetto di *congruenza fra segmenti*; ed ecco intanto un primo gruppo di postulati che si incontrano in questo ordine di idee:

1) Un segmento è congruente a se stesso.

2) Se un segmento è congruente ad un altro, anche il secondo è congruente al primo.

3) Due segmenti congruenti ad un terzo sono congruenti fra loro.

4) Un segmento non è congruente ad una sua parte.

5) Il segmento AB è congruente al segmento inverso BA.

6) Dato sulla retta un punto A ed un segmento XY qualunque, esistono sulla retta stessa due segmenti AB, AC congruenti ad XY da parti opposte di A.

Questi postulati sono intanto sufficienti a dare le definizioni e le proprietà relative ai concetti di somma, differenza, multipli, ecc. dei segmenti; e insieme col postulato di determinazione della retta per mezzo di due punti, colle proprietà lineari della retta (ordine, continuità) e col postulato d'ARCHIMEDE, servono, secondo le vedute dell'autore, a caratterizzare la retta considerata in se medesima.

Ammessa poi l'esistenza di punti fuori della retta, viene introdotto il postulato:

7) In ogni retta esiste un segmento congruente a un segmento qualunque dato.

(1) Nel render conto del metodo di VERONESE, oltrechè i *Fondamenti* e gli *Elementi* di questo Autore, abbiamo avuto sott'occhio la Nota di F. PALATINI, *I principî della Geometria esposti secondo il metodo di Veronese* (« Giornale di Battaglini », 1904, vol. 41).

Digitized by Google

Ciò posto, si può dare la definizione generale di figure congruenti, la quale (a prescindere dalla nomenclatura speciale dell'autore) si lascia esprimere come segue:

« Due figure si dicono congruenti quando ad ogni punto dell'una corrisponde uno ed un solo punto dell'altra per modo che i segmenti congiungenti le coppie di punti omologhi nelle due figure siano congruenti ».

Dalla definizione segue senz'altro l'eguaglianza di ogni figura con se stessa, quella di due figure che siano eguali ad una medesima, e la possibilità di stabilire in innumerevoli modi una corrispondenza di eguaglianza fra due rette (nelle quali siano stati o no fissati due versi) essendo arbitraria la scelta dei punti A, A' dai quali si parte per stabilirla.

Lo studio delle figure congruenti viene proseguito dal VERONESE negli *Elementi* secondo una via legata al postulato euclideo delle parallele. I postulati ammessi enunciano l'invertibilità della coppia di rette simmetriche (opposte) rispetto a un punto nella geometria euclidea, cioè:

8) La figura costituita dalle due rette r, s concorrenti in O, è congruente a quella delle due rette stesse considerate in ordine inverso.

9) Se due punti A, B, d'una retta r hanno per simmetrici rispetto ad un punto O due altri punti A', B' d'un'altra retta r', tutti i punti di r hanno sulla r' i loro simmetrici rispetto ad O; e le due rette stesse sono simmetriche rispetto al punto medio di qualunque segmento che congiunga un punto dell'una con un punto dell'altra.

Questi postulati (di cui l'ultimo contiene visibilmente quello delle parallele) permettono, una volta costruito il piano per proiezione da un punto, di dimostrarne la proprietà fondamentale (cfr. Articolo Secondo).

Di più si ottengono nel piano due specie di trasformazioni per congruenza; le simmetrie rispetto a una retta e quelle rispetto ad un punto. Si può dire anzi che la deduzione di codeste trasformazioni dai postulati sopra citati costituisce il passo fondamentale nel sistema di VERONESE. Componendo le simmetrie anzidette, resultano infatti in tutta la generalità i movimenti del piano, resulta cioè stabilito il principio di sovrapponibilità su cui si asside l'ordinaria teoria della congruenza.

Nei *Fondamenti* il VERONESE si occupa anche in generale

Digitized by Google

del metodo di fondare la teoria della congruenza nelle varie ipotesi che si ottengono col prescindere dal postulato delle parallele (cfr. Art. di Bonola, parte II). Allora non si ha più il postulato delle rette simmetriche rispetto a un punto, ma il postulato della invertibilità della coppia di rette viene surrogato da un altro più generale che può enunciarsi così:

8') « Se $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BL = B'C'$, e si prendono sui raggi AB, $A'B'$ i punti D, D' in modo che sia

$$AD = A'D',$$

e su AC, $A'C'$ i punti E, E' in modo che sia

$$AE = A'E',$$

resulta

$$DE = D'E' \text{ ».}$$

Questi dati non bastano per altro da soli a dimostrare in modo assolutamente generale la proprietà fondamentale del piano che il VERONESE ha in vista di dedurre dalla costruzione di esso. La discussione delle ipotesi che occorre aggiungere a tale scopo ci condurrebbe un po' fuori dell'ordine d'idee elementare a cui ci atteniamo in questo scritto. D'altronde la questione può essere riguardata come secondaria pel nostro scopo.

Ammettiamo pertanto introdotta cotesta proprietà mediante un postulato di cui preciseremo la forma, e domandiamoci se questi dati siano sufficienti per stabilire i termini fondamentali sulla congruenza dei triangoli, o che cosa occorra aggiungervi. Potremo così giudicare più chiaramente il valore dell'idea fondamentale del VERONESE per riguardo alla teoria che ci occupa indipendentemente dalle altre vedute che ne caratterizzano il sistema.

Prenderemo il postulato accennato sotto la forma seguente:

9') « Se sopra due raggi OA, OB si prendono rispettivamente due punti A', B', ogni raggio proiettante da O un punto del segmento AB incontra il segmento $A'B'$ ».

Questo postulato ci conduce immediatamente alle proprietà fondamentali dell'angolo $\widehat{AOB}$, definito come l'insieme dei raggi proiettanti da O i punti del segmento AB (o di $A'B'$ ecc.) (cfr. Arti-

Digitized by Google

colo Secondo). La congruenza di due coppie di rette $OA\ OB$, $O'A'\ O'B'$ equivarrà, secondo la definizione generale, alla congruenza dei due angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$.

Secondo il postulato 8') due angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$ saranno congruenti se presi $OA = O'A'$, $OB = O'B'$, resulterà $AB = A'B'$. In tal caso sarà anche $\widehat{BAO} = \widehat{B'A'O'}$, ecc. Se allora si considera un raggio OC interno ad $\widehat{AOB}$ secante AB nel punto C, e si prende sopra $A'B'$ un punto C' per modo che sia $A'C' = AC$, resulterà $CO = C'O'$, e quindi $\widehat{AOC} = \widehat{A'O'C'}$ come anche $\widehat{BOC} = \widehat{B'O'C'}$.

Ciò posto, proponiamoci di stabilire i teoremi di congruenza dei triangoli.

Il caso in cui sono respettivamente eguali due lati e l'angolo compreso, e quello in cui sono respettivamente eguali i tre lati, discendono senz'altro dal postulato 8'). Occupiamoci pertanto del caso in cui i due triangoli hanno un lato e i due angoli adiacenti respettivamente eguali. Nei due triangoli ABC, $A'B'C'$ (fig. 5) sia $AB = A'B'$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$. Tentiamo una dimostrazione per assurdo.

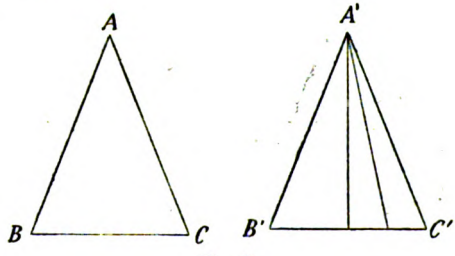


Fig. 5.

Perciò, supposto p. es. $B'C' > BC$, prendasi C_1 su $B'C'$ in modo che sia $B'C_1 = BC$; avremo $AC = A'C_1$ e quindi $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C_1} = \widehat{B'A'C'}$.

Così si ottiene un angolo congruente a una sua parte. Questa conseguenza non sembra veramente in contraddizione colle nostre premesse. Soltanto dovrà essere $A'C_1 \neq A'C'$. In tali ipotesi però potremo costruire entro l'angolo $\widehat{B'A'C_1}$ un raggio intersecante $B'C_1$ in un punto C_2 per modo che sia

$$\widehat{B'A'C_2} = \widehat{B'A'C_1} = \widehat{B'A'C'}$$

e la costruzione potrà proseguirsi indefinitamente.

Digitized by Google

Se si ammette quindi il *postulato della continuità* (cfr. Art. Quinto), la successione dei punti C_1C_2.... dovrà avere un punto limite K pel quale non potrà essere

$$B'\widehat{A'}K = B'\widehat{A'}C'.$$

Ma questa conseguenza ne involge un'altra contraria alla nostra intuizione; è facile invero persuadersi che si otterrà in tal caso un triangolo variabile di cui un lato diviene infinitamente piccolo mentre la differenza degli altri due lati si mantiene superiore ad un segmento assegnabile. La possibilità di un siffatto caso può essere negata mediante un postulato che si potrebbe chiamare *di continuità del piano* (1).

In base a questo si riesce dunque alla dimostrazione che ci eravamo proposti, e quindi a fondare tutta l'ordinaria teoria della congruenza.

L'accennato postulato ha effettivamente un ufficio notevole nel sistema esposto dal VERONESE nei *Fondamenti*; soltanto la forma ivi adottata è un po' diversa perchè l'Autore ha in vista una più generale Geometria non archimedea.

Gli sviluppi indicati ci permettono di formarci un giudizio sul valore del sistema di VERONESE.

L'idea fondamentale di ridurre la nozione generale della congruenza al caso dei segmenti realizza evidentemente un progresso teorico sul metodo di PASCH, progresso che appare d'altronde conforme alle vedute di altri Autori. Ma lo svolgimento della teoria quando si prendano a punto di partenza i postulati di VERONESE riesce forse più complicato di quello che si ottiene partendo dai postulati di PASCH. È tuttavia una difficoltà didattica comune ai due metodi quella d'introdurre fin da principio il concetto astratto di corrispondenza. Tale difficoltà si può dire eliminata o, per lo meno, attenuata, col metodo di HILBERT che ora passiamo ad esporre.

§ 7. Il sistema di Hilbert. — Il lavoro di HILBERT che abbiamo sopra citato contiene un nuovo punto di vista sul modo d'introdurre la nozione di congruenza. Mentre il PASCH introduce

(1) Quando è già fondata l'ordinaria teoria della congruenza, questa proposizione consegue dalla continuità della retta.

Digitized by Google

come primitiva la nozione di *congruenza fra figure qualsiasi*, ed il VERONESE soltanto *fra segmenti*, nel sistema di HILBERT figurano come primitive le nozioni di *congruenza fra segmenti e fra angoli*. È una via che, in un certo senso, sta di mezzo fra quelle degli altri due Autori e che, adottata sistematicamente nell'insegnamento della Geometria (1), ci sembra più delle altre vantaggiosa dal punto di vista didattico. Noi crediamo infatti che sostituendo il concetto intuitivamente chiaro della relazione di congruenza angolare con una definizione (come fanno PASCH e VERONESE) non si riesca a dare un'idea immediatamente comprensibile di tale relazione. E d'altronde è evidente che i postulati stessi, pur formulati indipendentemente dal concetto di congruenza angolare (ad esempio quello di VERONESE per la congruenza fra coppie di rette) si basano in sostanza sull'intuizione di tale concetto.

Notiamo ancora che questa formulazione Hilbertiana si può riguardare come la più vicina alle vedute euclidee che essa asside sopra una base rigorosa rilevando i concetti primitivi di congruenza segmentaria ed angolare che vi sono contenuti e postulandone i rapporti desunti dall'uso, il più limitato possibile, del movimento.

Ecco qui registrati, a meno dell'ordine e di qualche amplificazione fatta allo scopo di rendere più semplice lo svolgimento della teoria, i postulati proposti da HILBERT:

1) Se un segmento è congruente ad un altro, anche il secondo è congruente al primo.

2) Se un angolo è congruente ad un altro, anche il secondo è congruente al primo.

3) Due segmenti congruenti da un terzo sono congruenti fra loro.

4) Due angoli congruenti ad un terzo sono congruenti fra loro.

5) Ogni segmento AB è congruente a se stesso indipendentemente dal suo verso, cioè:

$$AB \equiv AB \equiv BA.$$

6) Ogni angolo (ab) è congruente a se stesso indipendentemente dal suo verso, cioè:

$$(ab) \equiv (ab) \equiv (ba).$$

(1) Così è fatto nel volume di F. ENRIQUES e U. AMALDI, *Elementi di Geometria*, Bologna, Zanichelli, 1903-1904.

Digitized by Google

7) Sopra ogni retta r', a partire da un suo punto qualunque A', e da ciascuna delle due parti, esiste uno ed un solo segmento congruente ad un segmento AB appartenente alla retta r.

8) Dato un raggio a, uscente da un punto O, in ogni piano che lo contiene, e da ciascuna delle due parti, esiste uno ed un solo raggio b uscente da O, e tale che l'angolo (ab) resulti congruente ad un dato angolo $(a'b')$.

9) Se AB, BC sono due segmenti consecutivi della stessa retta r (cioè aventi un estremo e nessun altro punto comune), $A'B'$, $B'C'$ altri due segmenti consecutivi sulla retta r', e si ha $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, si ha pure $AC \equiv A'C'$.

10) Se (ab), (bc) sono due angoli consecutivi dello stesso piano π (cioè aventi il vertice e un lato in comune), $(a'b')$, $(b'c')$ altri due angoli consecutivi in uno stesso piano π', e si ha $(ab) \equiv (a'b')$, $(bc) \equiv (b'c')$, si ha pure $(ac) \equiv (a'c')$.

11) Se due triangoli hanno rispettivamente congruenti due lati e l'angolo compreso, hanno rispettivamente congruenti anche i terzi lati e gli angoli opposti ai lati congruenti.

Notiamo subito che dai postulati 6° e 11° segue l'eguaglianza degli angoli alla base del triangolo isoscele, e che i post. 9° e 10° enunciano, in sostanza, la proposizione:

« Somme o differenze di segmenti, o di angoli, rispettivamente eguali, sono eguali ».

Aggiungiamo che il post. 11°, che lega il concetto di congruenza fra segmenti con quello di congruenza fra angoli, si potrebbe dare, come nel lavoro di HILBERT, sotto forma più semplice, concedendo *a priori* soltanto la congruenza degli angoli opposti ai lati eguali, e non quella dei terzi lati, che segue immediatamente dalla prima e dal post. 8°; qui si è preferito completarlo anche con questa parte, giacchè essa discende, come l'altra, dalla stessa dimostrazione empirica col movimento.

Definita ora l'eguaglianza di due triangoli come eguaglianza dei lati e degli angoli compresi fra i lati rispettivamente eguali, passiamo ad esporre le altre due proposizioni sulla congruenza dei triangoli.

I. *Sono congrui due triangoli che hanno rispettivamente congrui un lato e i due angoli adiacenti.*

Siano i due triangoli ABC, $A'B'C'$ che abbiano

$$AB \equiv A'B', \ \widehat{CAB} \equiv \widehat{C'A'B'}, \ \widehat{CBA} \equiv \widehat{C'B'A'}.$$

Digitized by Google

Dico che i due triangoli sono congrui. Basta provare che è $CA \equiv C'A'$, perchè il teorema resulti dimostrato in base al post. 11°.

Se non fosse $CA \equiv C'A'$, si potrebbe determinare sul raggio AC un punto C'' tale che fosse

$$AC'' \equiv A'C'.$$

Dal confronto dei triangoli $C''AB$ $C'A'B'$ si avrebbe allora

$$C''\widehat{B}A \equiv C'\widehat{B'}A'$$

e perciò anche (post. 4°)

$$C\widehat{B}A \equiv C''\widehat{B}A,$$

contro il post. 8°.

II. *Due triangoli sono congrui, se i lati dell'uno sono rispettivamente congrui ai lati dell'altro.*

Siano i due triangoli ABC $A'B'C'$ (fig. 6) che abbiano

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ BC \equiv B'C'.$$

Dico che i due triangoli sono congruenti.

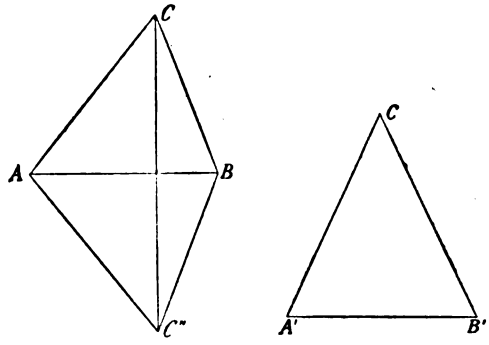


Fig 6.

Nel piano ABC, e dalla parte opposta a quella dalla quale si trova il punto C rispetto ad AB, determiniamo l'angolo $B\widehat{A}C'' \equiv C'\widehat{A'}B'$ e prendiamo $AC'' \equiv A'C'$. Dai triangoli BAC'', $C'A'B'$ segue allora

$$C''B \equiv C'B' \quad A\widehat{C''}B \equiv A'\widehat{C'}B'.$$

Costruito il segmento CC'', si osservi che i triangoli CAC'', CBC'' sono isosceli ed hanno perciò eguali gli angoli alla base. Per l'os-

Digitized by Google

servazione fatta sopra, relativa al post. 10°, tanto nel caso che il segmento CC'' incontri il segmento AB, quanto nel caso che incontri il suo prolungamento, si conclude

$$A\widehat{C''}B \equiv A\widehat{C}B.$$

Ma si ha:

$$A\widehat{C''}B \equiv A'\widehat{C'}B',$$

dunque

$$A\widehat{C}B \equiv A'\widehat{C'}B',$$

e per il post. 11°, i due triangoli dati sono congruenti.

§ 8. **Principali proposizioni sulle perpendicolari.** — Abbiamo già accennato come in EUCLIDE si fondi la teoria delle perpendicolari sul postulato della eguaglianza degli angoli retti (o piatti), la quale eguaglianza si lascerebbe giustificare col movimento. Vale la pena di vedere come HILBERT riesca ad edificare questa teoria senza l'aggiunta di alcun postulato. Incominciamo dal dimostrare il

TEOR. I. — *Angoli adiacenti* (1) *di angoli eguali sono eguali.*

Siano i due angoli eguali (ab) $(a'b')$ (fig. 7) di vertici O, O' e consideriamo i loro adiacenti (a_1b), (a'_1b').

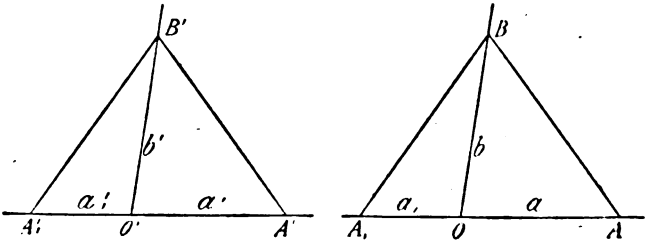


Fig. 7.

Dico che

$$(a_1b) = (a_1'b').$$

Infatti presi tre punti qualunque A, B, A_1 sui raggi a, b, a_1 rispettivamente, determiniamo sui raggi a', b, a_1' i punti A', B', A_1' in modo che sia

$$OA \equiv O'A' \quad OB \equiv O'B' \quad OA_1 \equiv O'A_1'.$$

(1) Per angolo *adiacente* d'un angolo dato intendiamo, come di ordinario, quello compreso da uno dei lati dell'angolo dato e dal prolungamento dell'altro lato al di là del vertice.

Digitized by Google

Condotti poi i segmenti AB, A_1B, e i corrispondenti $A'B_1'$, $A'B'$, dai triangoli eguali BOA, $B'O'A'$, segue

$$BA \equiv B'A' \quad \widehat{BAO} \equiv B'A'O' ;$$

quindi sono eguali anche i triangoli BAA_1, $B'A'A_1'$, e si ha:

$$BA_1 \equiv B'A_1'.$$

Considerando allora l'altra coppia di triangoli BOA_1, $B'O'A_1'$, si trova che hanno i tre lati rispettivamente eguali e se ne conclude:

$$(a_1b) \equiv (a_1'b') ;$$

come si voleva dimostrare.

Cor. — Due angoli opposti al vertice sono eguali.

Infatti, due angoli opposti al vertice sono adiacenti del medesimo angolo.

Def. — Un *angolo* dicesi *retto*, se è eguale ad uno de' suoi adiacenti (1).

Osserviamo che, pel Cor. precedente, se un angolo è eguale ad uno dei suoi adiacenti, è eguale anche all'altro.

Teor. II. — *Gli angoli retti sono eguali.*

Siano dati i due angoli retti (ab), $(a'b')$ (fig. 8). Dico che

$$(ab) \equiv (a'b').$$

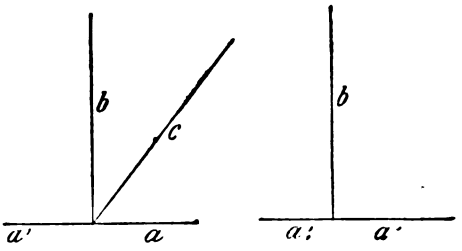


Fig. 8.

Infatti, se non è $(ab) \equiv (a'b')$, si potrà determinare dalla stessa parte di a dalla quale di trova b, un raggio c distinto da b, e tale che

$$(ac) \equiv (a'b').$$

(1) L'esistenza di un angolo retto si desume poi dal teor. III.

Digitized by Google

Allora, essendo, pel teor. I,

$$(a^{o}c) \equiv (a'^{o}b'),$$

e per definizione

$$(a_1'b') \equiv (a'b') \equiv (ac),$$

resulta:

$m)$ $$(a_1c) \equiv (ac).$$

Ma è anche

$n)$ $$(a_1b) \equiv (ab);$$

ed è facile vedere che le due relazioni $m)$ $n)$ sono in contraddizione l'una coll'altra. Essendo invero non congruenti i due angoli (ac) (ab), sarà, per esempio,

$$(ac) < (ab) \quad \text{e} \quad (a_1c) > (a_1b),$$

e per la $n)$

$$(a_1c) < (ac)$$

che contraddice alla $m)$. I due raggi b, c non possono dunque esser distinti, e il teorema rimane dimostrato.

Teor. III. — *Per un punto* A, *non appartenente a una retta* a, *passa una, ed una sola retta perpendicolare ad* a (fig. 9).

Scelto infatti un punto qualunque P su a, uniamo i punti A, P e chiamiamo r il raggio PA. Determiniamo poi nel piano Aa, e dalla parte opposta a quella dalla quale si trova A, il raggio s per P, tale che

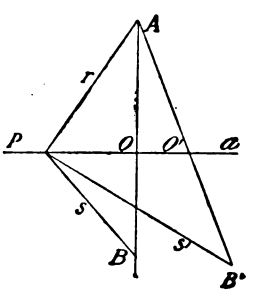


Fig. 9.

$$(ra) \equiv (sa)$$

e il punto B tale che

$$PA \equiv PB.$$

Unito A con B, è chiaro che la AB è perpendicolare alla a perchè dai due triangoli eguali APO, BPO resulta

$$\widehat{AOP} \equiv \widehat{BOP}.$$

Questa perpendicolare poi è unica perchè ogni altra retta AB' che incontrasse a in O' e che fosse perpendicolare ad a, quando

Digitized by Google

si fosse fatto dall'altra parte $O'B' \equiv O'A$, e si indicasse con s' il raggio PB' darebbe evidentemente:

$$(ra) \equiv (s'a) \quad PA \equiv PB'$$

donde

$$(sa) \equiv (s'a) \quad PB \equiv PB' ;$$

ossia i punti B, B' non sono distinti, e quindi un'altra perpendicolare non può esistere.

Teor. IV. — *Per un punto* A *di una retta* a, *passa una ed una sola perpendicolare ad* a.

Questa è infatti la retta per A facente con a un angolo eguale ad un angolo retto; e che sia unica resulta evidente dai postulati e dal teor. II.

§ 9. **Congruenza delle figure in generale.** — Il sistema di postulati di Hilbert, di cui abbiamo discorso, permette di giungere ad una definizione completamente generale della congruenza delle figure, mentre tale nozione è assunta come primitiva nel sistema di Pasch.

La definizione a cui alludiamo è la seguente:

Due figure si dicono congruenti quando ad ogni punto dell'una corrisponde un punto dell'altra ed uno solo, in guisa tale che i segmenti aventi per estremi coppie di punti corrispondenti sono eguali, e gli angoli aventi per lati segmenti corrispondenti sono eguali (1).

Hilbert stesso dimostra che dai teoremi d'eguaglianza dei triangoli si può dedurre la corrispondenza d'eguaglianza dei semipiani (o semispazi) cioè il principio ordinario di sovrapponibilità.

Siccome però la nozione generale di corrispondenza può venire giudicata didatticamente difficile nella sua astrattezza, così vale la pena di vedere come si possa giungere ad una definizione induttiva dell'eguaglianza per le figure che compariscono nella Geometria elementare.

Ci riferiremo qui alle figure piane attenendoci al metodo seguìto da F. Enriques e U. Amaldi nel «Trattato» sopra citato.

Pei poligoni rettilinei in generale (convessi, concavi, intrecciati), analogamente al caso dei triangoli, si definisce l'eguaglianza

(1) Qui bisogna aggiungere la condizione della eguaglianza di *verso* (cfr. Art. Secondo) se ci si vuole limitare alla congruenza *diretta*.

Digitized by Google

come eguaglianza dei lati ed angoli dell'uno coi lati ed angoli dell'altro; vale a dire, considerando in ciascuno dei poligoni i lati e gli angoli ordinati in una delle due *serie* (inverse l'una dell'altra) alle quali dànno luogo i vertici del poligono stesso, si dirà che i due poligoni sono congruenti allorchè i lati e gli angoli di una serie dell'uno sono ordinariamente eguali ai lati e agli angoli di una serie dell'altro.

L'eguaglianza di due circonferenze (o di due cerchi) si definisce come eguaglianza dei relativi raggi; e quella di due archi (o di due settori) circolari appartenenti a circonferenze (o a cerchi) eguali, si definisce come eguaglianza degli angoli al centro che li comprendono.

Per le figure a contorno circolare o misto, essendo ciascuna di esse determinata da un numero finito di costruzioni elementari (segmenti ed angoli), la definizione dell'eguaglianza si può desumere dall' identità delle costruzioni stesse e dalla eguaglianza degli elementi coi quali sono eseguite. Possiamo perciò assumere la seguente definizione:

Due poligoni a contorno circolare o misto si dicono uguali quando sono soddisfatte le tre condizioni seguenti:

1) sono eguali i poligoni rettilinei determinati dai loro vertici nell'ordine stesso;

2) sono ordinatamente eguali gli archi che costituiscono i lati dei due poligoni;

3) questi archi sono nei due poligoni *ugualmente posti* rispetto alle loro corde.

§ 10. **Diedri e triedri.** — In ciò che precede ci siamo riferiti alla Geometria piana. Diamo ora un rapido cenno degli sviluppi relativi ai diedri e ai triedri.

Quando si basa la teoria della eguaglianza sul principio della sovrapponibilità col movimento, non si ha alcuna difficoltà a trattare dei diedri eguali ed a riconoscere (con un'esperienza ideale) che « tutti i rettilinei d'un diedro sono eguali » e che « diedri aventi eguali rettilinei sono sovrapponibili ». La prima esperienza (traslazione) contiene però implicitamente il postulato delle parallele.

Escludendo il principio sperimentale della sovrapponibilità, si presenta spontanea l'idea di definire come « *eguali* » due diedri i cui rettilinei siano eguali, ma si richiede perciò la dimostrazione dell'eguaglianza dei rettilinei d'uno stesso diedro. La quale può

Digitized by Google

darsi, indipendentemente dal postulato delle parallele, nel modo seguente:

Se $\widehat{ABC}$, $\widehat{DEF}$ sono due rettilinei del diedro di costola BE (fig. 10), si prendano sui prolungamenti dei raggi EF, ED al di là del vertice E i segmenti EK, EH respettivamente eguali ai segmenti BA, BC segnati sui lati del primo angolo. Ciascuno dei segmenti HC, AK incontra allora il segmento EB nel suo punto medio O. Si ha perciò:

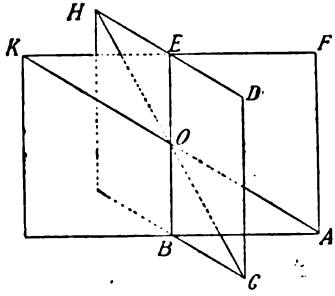


Fig. 10.

$$\text{tr. } KEO = \text{tr. } ABO$$

e

$$\text{tr. } HEO = \text{tr. } CBO$$

donde

$$KO = AO, \quad HO = CO$$

ed anche

$$\text{tr. } HOK = \text{tr. } CAO.$$

Se ne conclude

$$HK = CA \text{ e tr. } HEK = \text{tr. } ABC$$

e quindi l'eguaglianza dei due rettilinei.

Dopo ciò è interessante di vedere come possa fondarsi tutta la teoria dell'eguaglianza dei triedri senza fare uso del principio di sovrapponibilità che ricorre negli sviluppi ordinari (1).

Consideriamo come congruenti due triedri che hanno rispettivamente eguali i diedri e le facce, senza distinguere il caso della congruenza diretta (sovrapponibilità) ed inversa (triedri simmetrici), ciò che può farsi in base alla nozione del verso (Art. Secondo).

(1) Ordinariamente si riconosce per mezzo della sovrapposizione l'eguaglianza di due triedri nei due casi in cui abbiano rispettivamente eguali due facce e il diedro compreso, oppure due diedri e la faccia compresa. Il terzo caso poi, in cui siano respettivamente eguali le facce, si giustifica riconducendolo al primo, col dimostrare, mediante facili considerazioni di triangoli eguali, l'eguaglianza dei rettilinei di due diedri corrispondenti.

In EUCLIDE non si trovano gli ordinari teoremi d'eguaglianza dei triedri; soltanto nella proposizione XXVI del Libro XI vengono chiamati *eguali* due triedri aventi le facce respettivamente eguali.

Digitized by Google

Secondo le vedute del VERONESE, la trattazione dovrebbe correre parallela a quella della Geometria piana per i triangoli.

Poste a riscontro le proposizioni fondamentali comuni al piano e alla stella (insieme delle rette, o raggi, o dei piani o fasci di rette o di raggi per un punto) se ne potranno trarre le analoghe conseguenze facendo uso di un *principio di dualità* per cui al « punto » e alla « retta » del piano si sostituiscano la « retta » o il « raggio » e respettivamente il « piano » o il « fascio di rette o di raggi » della stella. La cosa però non è così semplice ed immediata come si potrebbe credere, ed esige considerazioni di un ordine delicato.

Fra la Geometria del piano e quella della stella sussistono infatti delle differenze fondamentali:

1) la retta è una *linea* i cui punti sono disposti in un *ordine aperto*, ed invece gli elementi (rette o raggi) del fascio dànno luogo ad un *ordine chiuso*, o, più precisamente, ad una *disposizione circolare* (cfr. Art. Secondo);

2) nel piano si hanno rette non incontrantisi (parallele), mentre due piani nella stella hanno sempre comune una retta (o due raggi opposti se si tratta della stella di raggi).

L'applicazione immediata dell'idea fondamentale del VERONESE esigerebbe dunque che la teoria della congruenza dei triangoli fosse svolta nel piano in modo da porre in evidenza che non ci si appoggia nè al fatto che la retta è linea *aperta*, nè al postulato euclideo delle parallele. Se invece (come nel sistema di VERONESE) si costruisca fin da principio la Geometria piana su questo postulato, si dovrà porgere una nuova dimostrazione per quei teoremi di Geometria della stella i cui correlativi, pur valendo nel piano, sono stati dimostrati in base a tale ipotesi.

Così, per esempio, il VERONESE dimostra il teorema della Geometria del piano « un lato d'un triangolo è minore della somma degli altri due » appoggiandosi alle proprietà della perpendicolare e delle oblique da un punto a una retta. Le proprietà correlative di queste ultime, che valgono nella Geometria della stella, sono poi utilizzate per dimostrare il teorema (correlativo di quello sopra citato) « una faccia d'un triedro è minore della somma delle altre due ». Ma l'Autore ha dovuto dare di esse una nuova dimostrazione perchè le proprietà della perpendicolare e delle oblique da un punto a una retta nel piano furono già dimostrate con un metodo che implica il postulato delle parallele.

Digitized by Google

In sostanza la cosa essenziale da dimostrare secondo quest'ordine d'idee è che vale nella stella un principio di trasformazione delle figure ove gli angoli omologhi sono eguali, correlativo del principio di trasformazione per congruenza nel piano. A tal fine occorre stabilire che si può porre nello spazio (in due modi) una corrispondenza puntuale in cui a segmenti uguali corrispondono segmenti uguali, e dove:

1) ad un punto O corrisponda se medesimo;

2) a due raggi per O, altri due raggi per O stesso formanti un angolo eguale.

È chiaro come, stabilito il principio di trasformazione sopra accennato, si possano dedurre i criterî d'eguaglianza di due triedri che hanno respettivamente eguali due facce e il diedro compreso, oppure due diedri e la faccia compresa.

Il caso di due triedri aventi respettivamente eguali le tre facce si deduce poi da questi come, nel piano, il terzo criterio d'eguaglianza dei triangoli dagli altri due.

È noto che agli accennati criterî d'eguaglianza pei triedri se ne aggiunge ordinariamente un quarto, vale a dire quello in cui i due triedri abbiano respettivamente eguali i diedri.

Tale criterio può dirsi correlativo del terzo, secondo una legge di *dualità nella stella* che autorizza lo scambio delle parole *retta* (o raggio) e *piano* (o semipiano) uscenti dal centro della stella. Secondo questa stessa legge di dualità, possono evidentemente anche i primi due criterî d'eguaglianza sopra accennati considerarsi come correlativi l'uno dell'altro.

Tornando alla trattazione generale di cui abbiamo discorso, osserveremo che le difficoltà a cui essa dà luogo appariscono in chiara luce come attinenti al fatto che i teoremi sulla congruenza dei triedri non corrispondono esattamente a quelli dei triangoli (venendo meno l'esistenza di triedri simili diseguali). Ne emerge quindi che il concetto stesso di dare alle due teorie uno sviluppo parallelo può apparire discutibile.

Passeremo ora ad accennare ad un'altra trattazione dell'argomento che s'incontra nel citato libro di Enriques e Amaldi, per la quale si giunge a stabilire i teoremi di congruenza dei triedri indipendentemente dal postulato delle parallele.

I quattro casi d'eguaglianza dei triedri si lasciano ridurre a due, come già abbiamo veduto, deducendosi gli altri due col principio di dualità nella stella, e cioè:

Digitized by Google

1) il caso in cui si hanno due facce respettivamente eguali ed il diedro compreso eguale;

2) il caso in cui le tre facce sono respettivamente eguali.

I due teoremi possono riunirsi nell'enunciato:

« In diedri eguali, due sezioni i cui lati sono egualmente inclinati (*sezioni egualmente inclinate*) sopra lo spigolo, e precisamente sopra un raggio di esso, sono angoli eguali, e viceversa ».

Sotto questa forma il secondo teorema appare come l'inverso del primo, e la dimostrazione di esso si ottiene pure invertendo il seguente ragionamento che vale a stabilire il primo:

Si tratta dapprima il caso particolare in cui ciascuna delle due sezioni considerate abbia un lato perpendicolare allo spigolo del respettivo diedro.

Nei diedri eguali $\alpha'\beta'$, $\alpha_1'\beta_1'$, (fig. 11) siano dunque le due sezioni ABC, $A'B'C'$ tali che gli angoli $\widehat{EBC}$, $\widehat{E'B'C'}$ siano retti,

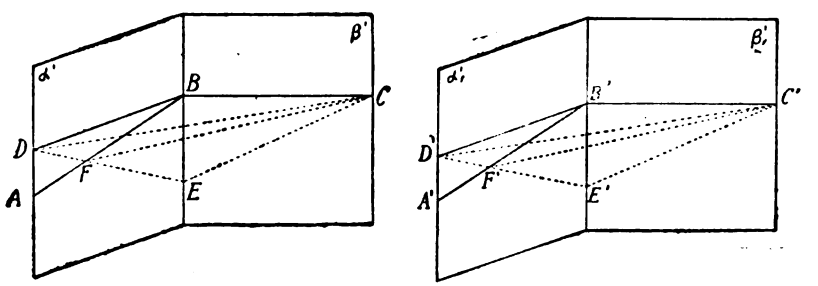


Fig. 11.

e gli angoli (acuti) $\widehat{EBA}$, $\widehat{E'B'A'}$ siano eguali. Per dimostrare l'eguaglianza delle due sezioni, si conduca nella faccia α' del primo diedro la perpendicolare BD allo spigolo, e si prendano ad arbitrio i segmenti BD, BC; poi sulla costola si segni un punto E arbitrario da tal parte che il raggio BA appartenga all'angolo $\widehat{DBE}$ ed incontri DE in F. Nell'altro diedro si faccia l'analoga costruzione prendendo

$$B'D' = BD, \quad B'C' = BC, \quad B'E' = BE.$$

Essendo i triangoli CBD, DBE, EBC, respettivamente eguali ai loro corrispondenti, sarà

$$CD = C'D', \quad DE = D'E', \quad EC = E'C', \quad \widehat{DEB} = \widehat{D'E'B'}$$

Digitized by Google

donde ancora

$$\text{tr. } BEF = \text{tr. } B'F'E', \quad \text{tr. } DCE = \text{tr. } D'C'E'$$

e perciò

$$BF = B'F', \quad FE = F'E', \quad \widehat{FEC} = \widehat{F'E'C'}.$$

Ne segue

$$\text{tr. } FEC = \text{tr. } F'E'C'$$

da cui

$$FC = F'C'.$$

I triangoli FBC, $F'B'C'$, avendo i lati respettivamente eguali dànno finalmente

$$ABC = A'B'C' \qquad \text{c. d. d.}$$

Passando ora al caso generale, consideriamo (fig. 12) nei diedri eguali $\alpha'\beta'$, $\alpha_1'\beta_1'$ le sezioni ABC, $A'B'C'$ tali che $\widehat{ABE} = \widehat{A'B'E'}$, $\widehat{CBE} = \widehat{C'B'E'}$. Per dimostrare l'eguaglianza delle dette

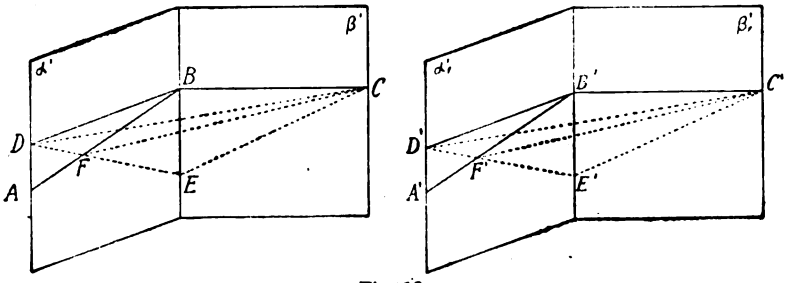


Fig. 12.

sezioni si conducano nelle facce $\alpha'\alpha_1'$, dei diedri le perpendicolari BD, $B'D'$ alle respettive costole. Per il caso già trattato avremo:

$$\widehat{DBC} = \widehat{D'B'C'};$$

ed ora basterà eseguire anche in questo caso le costruzioni analoghe e quelle eseguite nel caso precedente e ripetere passo passo i ragionamenti fatti poc'anzi per concludere l'eguaglianza dei triangoli FBC, $F'B'C'$ e quindi l'eguaglianza delle due sezioni date.

Digitized by Google

ARTICOLO QUARTO

Sulla teoria delle proporzioni, di Giovanni Vailati † (*).

I. — Le proporzioni secondo Euclide.

§ 1. **Definizioni.** — La teoria delle proporzioni quale si trova esposta nei libri V e VI degli *Elementi* d' Euclide prende le mosse dalle seguenti due definizioni:

1) Due grandezze A, B si dicono *stare nello stesso rapporto* di altre due C, D (ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἶναι) quando, per qualunque coppia di numeri interi m, n per la quale si abbia:

$$mA \gtreqless nB,$$

si abbia pure rispettivamente:

$$mC \gtreqless nD$$

(*) Giovanni Vailati, nato a Crema il 24 aprile 1863, morto a Roma il 14 maggio 1909. Laureato in Matematiche a Torino nel 1888, divenne nel 1892 Assistente alla Cattedra di Calcolo infinitesimale tenuta dal prof. Peano e più tardi (1895) anche Assistente onorario alla Cattedra di Meccanica razionale, col prof. Volterra. Nel 1899 fu nominato professore al Liceo di Siracusa, donde passò l'anno appresso all' Istituto tecnico di Bari e quindi a quello di Como, ove stette tre anni. Nel 1904, essendo stato incaricato di preparare l'edizione nazionale delle opere di Torricelli, venne trasferito a Firenze, ma dal 1905 in poi, per l'ufficio a cui fu chiamato come membro della Commissione Reale per la riforma della Scuola media, risiedette quasi sempre a Roma.

L'opera scientifica del Vailati — che trovasi riunita nel volume degli *Scritti*, edito da Seeber nel 1911 — più ancora che alle Matematiche, in cui ha lasciato alcuni studi attinenti alle questioni critiche, si riferisce alla

Digitized by Google

2) Due grandezze A, B si dicono *avere tra loro maggiore rapporto* (*μείζονα λογος ἔχειν*) che altre due C, D, quando sia possibile determinare dei numeri interi m, n tali che si abbia:

$$mA > nB$$

senza che si abbia nello stesso tempo:

$$mC > nD.$$

Giova porre a confronto queste due definizioni con quella di proporzione tra numeri interi data da EUCLIDE stesso (Lib. VII, def. 20) e che consiste nel dire che quattro numeri sono in proporzione (*ἄναλογον*) quando il primo e il terzo di essi si ottengano rispettivamente dal secondo e dal quarto moltiplicandoli per uno stesso numero intero, o dividendoli per uno stesso numero intero, o facendo l'una cosa e l'altra (*ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτό μέρος ἢ τὰ ἀυτὰ μέρη ὦσιν*).

Esse si contraddistinguono da questa anzitutto per la preoccupazione che EUCLIDE sembra aver avuta di evitare in esse ogni ricorso alla divisione in parti uguali delle grandezze di cui egli tratta.

Di tale preoccupazione è facile comprendere la causa quando si ponga mente al fatto che, tra le grandezze considerate dalla Geometria, se ne presentano di quelle, come per esempio gli angoli, per le quali la divisione in parti uguali non può essere sempre effettuata col solo impiego della riga e del compasso, mentre è norma costantemente seguìta da EUCLIDE quella di non prendere

storia e alla logica della scienza. Con grande versatilità e coerenza di pensiero, egli ha indagato soprattutto — traverso i campi più vari dello scibile — il problema della espressione delle idee per mezzo del linguaggio, lumeggiando l'importanza delle questioni di parole nello sviluppo della scienza. I filosofi empiristi — BERKELEY, MACH e infine WILLIAM JAMES cui si riattacca il suo « pragmatismo » — esercitarono la massima influenza sul suo pensiero. E la stessa tendenza empiristica e induttiva si manifesta altresì nella sua opera didattica, specie nelle direttive ch'egli aveva proposte alla Scuola media riformata.

VAILATI esercitò su molti compagni e su giovani discepoli un'influenza suggestiva, ed ebbe larghe amicizie tanto in Italia che all'Estero, ove spesso si recava a partecipare ai Congressi matematici e filosofici. L'articolo che qui si riporta fu pubblicato solo dopo la sua morte, e per questo motivo non è riprodotto nella raccolta dei suoi *Scritti*. (F. E.).

Digitized by Google

in considerazione alcuna figura o ente geometrico di cui egli non abbia prima assegnato un modo di costruzione ricorrendo al solo uso dei detti strumenti (1).

Tuttavia a questo inconveniente che si opponeva a che la definizione adottata da EUCLIDE pel caso dei numeri interi potesse venir estesa a ogni specie di grandezze considerate in Geometria, si sarebbe potuto facilmente ovviare col solo introdurre in essa una lieve modificazione. Dire infatti che quattro numeri a, b, c, d (o quattro grandezze suscettibili di essere divise in parti uguali) costituiscono una proporzione quando esiste una coppia di numeri interi m, n tali che si abbia nello stesso tempo

$$a = \frac{n}{m} c, \qquad b = \frac{n}{m} d$$

non differisce che per la forma dal dire che i detti numeri, o le dette grandezze, sono in proporzione quando esista una coppia di numeri tale che si abbia nello stesso tempo:

$$ma = nc, \quad mb = nd.$$

Ma se ciò bastava a superare uno degli ostacoli che si opponevano alla costruzione di una teoria generale delle proporzioni valida per ogni specie di grandezze, un altro, e ben più importante, ne rimaneva, quello dipendente dal fatto che, tra le grandezze considerate dalla Geometria, ve ne sono di quelle tra loro « incommensurabili », tali cioè che nessun multiplo dell'una risulti uguale ad alcun multiplo dell'altra.

Il fatto che due grandezze, per esempio due segmenti a, b, fossero incommensurabili non impediva che su essi e su un terzo segmento qualunque c potessero essere effettuate quelle stesse operazioni geometriche che, nel caso che essi fossero commensurabili, avrebbero condotto a determinare un quarto segmento costituente coi tre dati una proporzione nel senso della definizione (20ª) sopra riportata.

E poichè i gruppi di quattro segmenti in tal modo ottenuti, non *cessavano*, pel fatto della loro incommensurabilità, di godere di proprietà geometriche completamente coincidenti con quelle

(1) Cfr. ZEUTHEN, *Histoires des Mathématiques dans l'antiquité*, ch. 10.

Digitized by Google

di segmenti commensurabili costituenti una proporzione nel senso della definizione suddetta, si presentava inevitabilmente il bisogno di una nuova e più generale definizione di proporzione, dalla quale essi non venissero esclusi.

A tale esigenza soddisfano le due definizioni che come vedemmo EUCLIDE pone a base della sua trattazione generale.

La loro introduzione sembra essere dovuta ad EUDOSSO di Cnido, al quale pure la tradizione attribuisce la paternità di una gran parte del contenuto del libro V, oltre alla scoperta del metodo cosiddetto di « esaustione ».

La definizione di EUDOSSO, enunciata sotto la forma, più semplice, che essa assume quando *non* si tenga conto dell'altra esigenza che EUCLIDE si era imposta (quella cioè riferentesi alla divisibilità in parti uguali) non differisce affatto da quella che si esprimerebbe in linguaggio moderno dicendo che quattro grandezze A, B, C, D sono in proporzione quando non vi sia alcun numero razionale x che soddisfi all'una o all'altra delle tre condizioni: $A \gtreqless xB$, senza che per esso si abbia pure rispettivamente: $C \gtreqless xD$; o, in altre parole, quando le classi di numeri razionali, determinate dalle due condizioni: $A > xB$, $A < xB$ coincidano colle due classi determinate rispettivamente dalle due condizioni: $C > xD$, $C < xD$ (poichè in tal caso anche la condizione $A = xB$, *dato che si verificasse per qualche numero razionale*, non potrebbe essere soddisfatta che da numeri soddisfacenti nello stesso tempo anche alla condizione $C = xD$).

§ 2. **Sul cosiddetto postulato d'Archimede.** — Resa in tal modo la definizione di proporzione indipendente da qualsiasi restrizione relativa alla commensurabilità delle grandezze, l'unica condizione che restava da richiedere, perchè, per una data categoria di grandezze, avesse un senso il domandarsi se quattro di esse costituissero o no una proporzione, era questa: che di tali quattro grandezze tanto le due prime come le due ultime fossero tali da ammettere effettivamente dei multipli soddisfacenti alle condizioni contemplate nella definizione.

Tale esigenza si trova appunto enunciata da EUCLIDE sotto la forma di una definizione (4ª del Lib. V):

« Due grandezze sono dette *aver tra loro rapporto* quando ciascuna presa un numero sufficiente di volte può superare l'altra

Digitized by Google

(*λόγον ἔκειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν*) ».

La qual definizione, come appunto osservano i migliori commentatori, non ha altro ufficio che quello di dichiarare che, ogni qualvolta si parli di uguaglianza o disuguaglianza di rapporti, s'intende presupposto che le coppie di grandezze che compaiono come termini di ciascuno dei « rapporti » di cui si tratta, soddisfino a quello che ora si chiama « postulato d'ARCHIMEDE », postulato che del resto, come vedremo, si trova anche enunciato da EUCLIDE (nella dimostrazione della prop. 8ª) sotto la forma che ordinariamente assume nelle trattazioni moderne (1).

§ 3. Primo gruppo di proposizioni. — Veniamo ora a delineare brevemente l'ordine seguìto da EUCLIDE nello svolgere, in base alle premesse sopra indicate, una teoria generale delle proporzioni.

La prima proposizione, che egli deduce direttamente dalla definizione da lui stabilita, è la seguente:

« *Se quattro grandezze* A, B, C, D *sono in proporzione, sono pure in proporzione le altre quattro grandezze che si ottengono moltiplicando rispettivamente le grandezze* A, C *e le grandezze* B, D *per due numeri interi qualunque* » (prop. 4ª, Lib. V).

A questa fa seguito un gruppo di quattro proposizioni di cui le prime due (7ª, 8ª), affermano che *se* A *è una grandezza uguale o maggiore di* B, *si ha sempre, qualunque sia una terza grandezza* C, *rispettivamente*:

$$\frac{C}{A} \geqq \frac{C}{B}.$$

Le altre due (9ª, 10ª) sono le proposizioni inverse di queste.

Anche queste proposizioni sono da EUCLIDE dedotte direttamente dalle definizioni già sopra riportate dell'uguaglianza o disuguaglianza di due rapporti.

Di una sola fra esse, l'8ª, trascriverò qui per esteso la di-

(1) Seguendo lo ZEUTHEN, vi è motivo di far risalire questo postulato ad EUDOSSO di Cnido, cui spetta la sistemazione critica della teoria delle proporzioni e del metodo d'esaustione (Cfr. Art. Primo). L'avvertimento del fatto che esso esprime è d'altronde già implicito — sebbene sotto forma negativa — nell'argomento, detto « Achille », di ZENONE d'Elea.
(Nota di F. E.).

Digitized by Google

mostrazione, la quale presenta particolare interesse pel fatto che essa è la sola nella quale venga fatto espressamente appello al postulato espresso, come già vedemmo, da EUCLIDE mediante la definizione 4ª.

Siano A e B due grandezze differenti e sia $A > B$. Si tratta di dimostrare che, essendo C una terza grandezza, si ha pure

$$\frac{C}{B} > \frac{C}{A}$$

A tale scopo si determini un numero intero n tale che, moltiplicando per esso la più piccola delle due grandezze B e $A - B$ si ottenga una grandezza maggiore di C.

Si avrà allora

$$[1] \qquad nB > C$$

e

$$[2] \qquad n(A - B) > C.$$

Si determini ora il più piccolo dei multipli di C maggiori di nB. Indicandolo con kC potremo scrivere

$$[3] \qquad (k - 1)\, C \leqq nB < kC$$

ove k, in virtù della [1], deve essere maggiore di 1.

Dalla [3] si deduce:

$$kC \leqq nB + C$$

e, poichè d'altra parte, per la [2] si ha che:

$$nA > nB + C,$$

si avrà:

$$kC < nA.$$

Esistono quindi due numeri k, n interi tali che soddisfano alla condizione:

$$kC > nB$$

senza che essi soddisfino all'altra

$$kC > nA$$

Digitized by Google

il che equivale, per definizione, a dire che:

$$\frac{C}{B} > \frac{C}{A}.$$

§ 4. **Secondo gruppo di proposizioni.** — Indipendentemente dalle proposizioni viste indietro, e ancora facendo capo direttamente alle definizioni di uguaglianza e di disuguaglianza di rapporti, EUCLIDE passa a dimostrare le proposizioni seguenti:

« *Se due rapporti sono ambedue uguali a un terzo rapporto essi sono uguali tra loro* » (prop. 11ª).

« *Se di due rapporti l'uno è uguale a un terzo rapporto e l'altro ne è maggiore, il secondo rapporto è maggiore del primo* » (prop. 13ª).

Dalla seconda di queste, col sussidio delle precedenti 8ª, 10ª, egli deduce le due seguenti:

« *Se quattro grandezze costituiscono una proporzione e la prima di esse è maggiore della terza anche la seconda è maggiore della quarta* » (prop. 14ª).

« *Due grandezze qualunque hanno lo stesso rapporto di due loro equimultipli qualunque* » (15ª).

Da queste, giovandosi della 7ª e dell'11ª, deduce la proposizione asserente che *in una proporzione è lecito alterare l'ordine dei medi.*

È da notare che tale dimostrazione, è da lui effettuata col sussidio anche dell'altra proposizione, antecedentemente dimostrata, che, se quattro grandezze A, B, C, D sono in proporzione, lo sono pure le quattro altre: A, B, $A + C$, $B + D$ (prop. 12ª).

A quest'ultima proposizione si riattaccano le altre relative alle note operazioni del *comporre* e del *dividere* cioè le due seguenti:

Se sussiste la proporzione

$$A : B = C : D$$

sussistono anche le due altre

(17ª) $$A - B : B = C - D : D$$

(18ª) $$A + B : B = C + D : D$$

nonchè l'altro teorema che dalla stessa proporzione:

$$A : B = C : D$$

deduce:

$$A : B = A - C : B - D.$$

Digitized by Google

§ 5. **Terzo gruppo di proposizioni.** — L'ultimo gruppo di proposizioni considerato nel Libro V è costituito da quelle che si riferiscono alle conclusioni che si possono ricavare dal sussistere di due proporzioni aventi comuni gli antecedenti (o i conseguenti) oppure gli estremi (o i medi).

Tanto nel primo caso, cioè in quello delle due proporzioni:

$$A : B = D : E, \quad B : C = E : F$$

quanto nel secondo cioè in quello delle due proporzioni:

$$A : B = E : F, \quad B : C = D : E,$$

Euclide dimostra anzitutto (prop. 20ª, 21ª) che se si ha $A \gtrless C$ si ha pure rispettivamente: $D \gtrless F$. Di qui deduce che ciascuna delle suddette coppie di proporzioni dànno luogo alla seguente

(22ª, 23ª) $$A : C = D : F$$

Mediante la predetta proporzione 22ª e col sussidio del teorema relativo all'invertibilità dei medi (prop. 16ª) viene infine dimostrata l'altra proposizione (24ª), che dalle due proporzioni:

$$A : B = D : E, \quad C : B = F : E$$

deriva l'altra:

$$A + C : B = D + F : E.$$

Il libro si chiude colla dimostrazione della proposizione seguente:

« *Se quattro grandezze sono in proporzione la somma della più grande colla più piccola di esse è maggiore della somma delle altre due* ».

§ 6. **Proporzioni di segmenti ed aree.** — Dell'applicazione della teoria generale, fin qui riassunta, alla geometria e in particolare ai segmenti e alle aeree piane, a contorno rettilineo o circolare, si occupa Euclide nel successivo Libro (VI).

Egli comincia col dimostrare, facendo diretto appello alla definizione di uguaglianza di rapporti, da lui stabilita, come vedemmo, nel Libro precedente, che « le aree di due triangoli o parallelogrammi aventi uguali altezze hanno fra loro rapporto uguale a quello delle rispettive basi (prop. 1ª).

Digitized by Google

Da questa vengono fatte dipendere le proposizioni relative alla proporzionalità dei lati di triangoli aventi angoli rispettivamente uguali, a partire da quella che afferma la proporzionalità dei segmenti determinati su due lati di un triangolo da una parallela al terzo lato (prop. 2ª).

Questa è infatti dimostrata mediante la considerazione dei due triangoli di ugual base e altezza compresi tra la detta trasversale e il lato al quale essa è parallela: cioè applicando il teorema precedente alle due coppie di triangoli d'eguale altezza costituite rispettivamente da uno di questi triangoli e da quello determinato dalla trasversale e dai due lati che essa taglia. Si ottengono così due proporzioni aventi comune un rapporto (quello cioè tra le aree dei triangoli sopra indicati) dalle quali in virtù del teorema, già prima dimostrato nella trattazione generale, asserente l'uguaglianza di due rapporti uguali a uno stesso rapporto, si conclude l'uguaglianza dei due rapporti rimanenti, che sono appunto quelli che sussistono tra i segmenti determinati dalla trasversale sui lati del triangolo.

Per mezzo della stessa prop. 1ª e parimenti col sussidio del teorema, sopraccennato, affermante che due rapporti uguali a un terzo sono uguali tra loro, viene poi dedotta la proposizione seguente e la sua inversa:

« *Se due parallelogrammi (o triangoli) sono equivalenti e un angolo dell'uno è uguale a un angolo dell'altro, le due coppie di lati che comprendono tali due angoli costituiscono rispettivamente i medi e gli estremi d'una proporzione* » (prop. 14ª, 15ª, 16ª).

Per mezzo di queste ultime, e precisamente per mezzo di quella che afferma l'equivalenza di due triangoli aventi un angolo comune compreso tra coppie di lati che figurano rispettivamente come medi ed estremi d'una stessa proporzione, si dimostra, sempre col sussidio della prop. 1ª, il teorema che Euclide enuncia dicendo che « le aree di due triangoli simili stanno tra loro *in ragione duplicata* di quella dei loro lati corrispondenti (prop. 19ª).

Qui è da notare come la frase « le tali due grandezze stanno in ragione duplicata di quella di due altre grandezze », per esempio di quella di A a B, è adoperata da Euclide semplicemente per indicare che le due prime quantità hanno un rapporto uguale a quello di A a una terza quantità C che soddisfa la seguente condizione: $A : B = B : C$.

Più generalmente, quando si abbia una serie di n grandezze

Digitized by Google

di cui ciascuna sia media proporzionale tra le due che le sono adiacenti le due estreme da lei sono dette stare in un rapporto $(n-1)^{plo}$ di quello di una qualunque di esse alla successiva (1).

La proprietà espressa dalla prop. 19ª per i triangoli simili è poi estesa (prop. 20ª) al caso di due poligoni simili qualunque e, parimente per mezzo della prop. 19ª, si dimostra (prop. 22ª) che se quattro segmenti costituiscono una proporzione, sono in proporzione anche le aree di quattro poligoni simili costruiti su essi rispettivamente come lati omologhi.

Tanto questa proposizione, come la sua reciproca compaiono come conseguenze dell'altra che rapporti duplicati di rapporti uguali sono uguali, la quale alla sua volta deriva immediatamente dalla prop. 22ª del V Libro già accennata indietro.

§ 7. **Ulteriori sviluppi: ragione composta.** — Al precedente gruppo di proposizioni è appoggiata la soluzione del problema di costruire una figura di data area e simile a una figura (poligonale) data.

Essa è effettuata costruendo due rettangoli l'uno equivalente alla figura data e avente per base uno dei lati di essa e l'altro avente la stessa altezza di questo ed equivalente all'area data. La media proporzionale delle basi di questi rettangoli, fornisce il lato che, nella figura che si cerca, è omologo del lato, della figura data, che si è scelto a base del primo rettangolo.

Merita particolare attenzione la proposizione 23ª:

« *Le aree di due parallelogrammi aventi angoli rispettivamente uguali stanno in ragione composta di quelle dei loro lati* ».

Dire che due grandezze S, S' stanno tra loro in un *rapporto composto* di due altri rapporti, per esempio dei due rapporti di

(1) Se infatti sussiste la proporzione:

(1ª) $$a : b = c : d$$

e x, y sono due quantità che soddisfano rispettivamente alle due condizioni seguenti:

(2ª) $$a : b = b : x$$

(3ª) $$c : d = d : y$$

si avrà:

(4ª) $$b : x = d : y$$

e, dalla (1ª) e (4ª), applicando la già citata prop. 22ª del Libro V

$$a : x = c : y.$$

Digitized by Google

A a B e di C a D non significa per EUCLIDE altro che questo che esista (cioè si possa determinare o costruire) una terza grandezza S'' tale che si abbia, contemporaneamente:

[1] $$A : B = S : S''$$

[2] $$C : D = S'' : S'.$$

È da notare che, in caso che i due rapporti dati, di A a B e di C a D siano eguali tra loro, il rapporto « composto » di essi non è altro che il rapporto « duplicato » di cui già s' è detto antecedentemente: allora, infatti dalle [1] e [2] si ricava:

$$S : S'' = S'' : S'.$$

Che rapporti composti di rapporti rispettivamente uguali siano uguali risulta immediatamente dalla proposizione già più volte adoperata (11ª, V) che due rapporti uguali a uno stesso rapporto sono uguali tra loro. Se si ha, infatti:

$$A : B = A' : B'$$
$$C : D = C' : D'$$

le due proporzioni:

$$A : B = S : S''$$
$$C : D = S'' : S',$$

permettono immediatamente di conchiudere

$$A' : B' = S : S''$$
$$C' : D' = S'' : S'.$$

È spesso conveniente indicare i due rapporti di cui si considera il rapporto composto, mediante tre sole grandezze, sostituendo cioè all'uno o all'altro di essi, per es. al rapporto di C a D il rapporto di B alla grandezza X determinata dalla condizione:

$$C : D = B : X.$$

Le [1] e [2] diventano allora

$$A : B = S : S''$$
$$B : X = S'' : S'$$

Digitized by Google

da cui, in virtù della già più volte accennata prop. 22ª del V libro:

$$A : X = S : S''.$$

Il che si può esprimere dicendo che il rapporto di due grandezze è « composto » del rapporto della prima di esse a una terza grandezza qualunque, e del rapporto di quest'ultima alla seconda.

La stessa considerazione è immediatamente applicabile al caso di rapporti composti d'un numero qualunque di altri rapporti.

§ 8. **Applicazioni ai problemi di 2° grado.** — Una delle più importanti applicazioni geometriche della sua teoria generale delle proporzioni ci presenta EUCLIDE nelle proposizioni seguenti riferentisi alla discussione e alla risoluzione del problema:

Costruire un parallelogramma di cui si conoscano l'area, gli angoli e il rapporto tra uno dei suoi lati e la differenza tra l'altro lato e un segmento dato.

Egli distingue anzitutto due casi che possono presentarsi, quello cioè in cui tale secondo lato del parallelogrammo che si cerca s' intenda dovere essere minore (ἐλλείπειν) del segmento dato e quello in cui invece s' intende che lo deve superare (ὑπερβάλλειν).

Alla risoluzione del primo caso è premessa una proposizione relativa alle condizioni alle quali occorre che i dati del problema soddisfino onde esso sia risolubile.

Tale proposizione, che tradotta in linguaggio moderno assume una forma alquanto più complicata che non nell'originale, è la seguente:

« Tra tutti i parallelogrammi, aventi angoli rispettivamente uguali e dei quali sia dato il rapporto di uno dei lati al segmento che rimane quando si sottragga l'altro lato da un segmento dato, quello di massima area è quello in cui quest'altro lato è uguale alla metà del segmento dato » (prop. 27ª).

La dimostrazione di questa proposizione (come anche delle altre del gruppo di cui ora parliamo) si basa essenzialmente sulla considerazione dei due parallelogrammi simili che si ottengono conducendo per un punto della diagonale d'un parallelogramma le parallele ai suoi lati (prop. 24ª, 26ª).

Essa procede nel modo seguente:

Si costruisce anzitutto (fig. 1), sulla metà AM del segmento dato AB, il parallelogrammo ($AMNC$) che si tratta di dimostrare

Digitized by Google

essere di area maggiore di qualunque altro che soddisfaccia alle condizioni imposte. Si unisce il vertice N di esso opposto ad A, coll'altro estremo B del segmento dato e si osserva che questa retta NB è il luogo dei vertici, opposti ad A, di tutti i parallelogrammi che soddisfano alle condizioni suindicate.

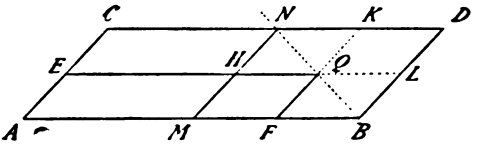


Fig. 1.

Si prenda ora uno qualunque di essi, per esempio $AEFQ$ e siano rispettivamente H, L, K i punti d'incontro del suo lato EQ con MN, BD, e del suo lato QF con NC.

I due parallelogrammi $MHQF$, $KQDL$ sono equivalenti, onde lo sono anche gli altri due $MHLB$, $FBKD$ che si ottengono aggiungendo ad essi rispettivamente il parallelogramma $FQLB$. Ma il parallelogramma $MHLB$ è uguale a $AEHM$. Dunque quest'ultimo è equivalente a $FBKD$. Aggiungendo ora a ciascuno di questi due il parallelogramma $MHQF$ si avrà che il parallelogramma $AFQE$ sarà equivalente alla somma di $FBKD$ e di $MHQF$ e quindi minore di $MNBD$, cioè di $AMNC$ come si voleva dimostrare.

Premessa questa dimostrazione e supposto che i dati del problema in questione soddisfino alla restrizione da essa stabilita, Euclide passa alla risoluzione del sopraindicato problema, che si può enunciare come segue:

« Sopra una parte AX di un segmento dato AB, costruire un parallelogramma di data area e tale che il parallelogramma che *manca* (per completare la figura in modo da avere un parallelogramma avente per base l'intero segmento AB) sia simile a un parallelogramma dato ».

A tale scopo egli costruisce, sulla metà MN del segmento dato AB (fig. 2), un parallelogramma $MNCB$ simile al parallelogramma dato. Con un vertice in N e con due dei suoi lati situati rispettivamente sui lati NC, MN del parallelogramma $MNCB$, costruisce poi un secondo parallelogramma $TNRL$ pure simile al dato (e del quale quindi il vertice L, opposto a N, cadrà sulla diagonale BN del parallelogramma prima costruito),

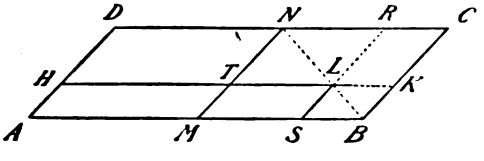


Fig. 2.

Digitized by Google

e avente per area la differenza tra l'area data e quella del parallelogramma *MNCB*. Se si prolunga ora il lato *RL* fino ad incontrare, in *S*, la *AB* e il lato *TL* fino ad incontrare in *H* la *AD*, si avrà, in *ASLH*, il parallelogramma cercato.

Esso infatti si compone di due parallelogrammi (*AMTH*, *MSLT*) equivalenti rispettivamente ai due parallelogrammi (*MBKT*, *LRCK*) che, presi insieme, costituiscono ciò che resta del parallelogramma *MNCB* quando se ne tolga il parallelogramma *TNRL* che, per costruzione, rappresenta appunto l'eccesso della sua area sull'area data.

In modo affatto analogo procede Euclide per risolvere il problema nell'altro caso cui abbiamo già accennato, quello cioè in cui il lato del parallelogramma cercato invece di essere una parte del segmento dato lo debba «sopravanzare» (ὑπερβαλλειν): nel qual caso non è più necessaria alcuna restrizione relativa ai dati del problema (prop. 29ª).

La soluzione generale di quest'ultimo problema è da lui immediatamente applicata al caso particolare importante nel quale l'area data sia quella del quadrato costruito sul segmento dato e in cui inoltre il parallelogrammo dato sia un quadrato.

Il problema si riduce allora a quello di costruire un rettangolo di cui l'area sia uguale a quella del quadrato costruito su un dato segmento a e di cui l'altezza, x, sia uguale all'eccesso della sua base sul segmento dato, in altre parole al problema espresso dall'equazione:

$$a^2 = x\,(a + x)$$

coincidente con quello di dividere un segmento in media ed estrema ragione (ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν), problema che da Euclide si trova anche risoluto, indipendentemente dalla teoria delle proporzioni, col ricorso a sole considerazioni di equivalenza (Lib. II, prop. 11ª).

Lo stesso è anche da notare per il problema, più generale di quest'ultimo, che risulta dal supporre che il parallelogramma, che figura tra i dati dei due problemi precedenti, sia un rettangolo: per il problema cioè di determinare i lati di un rettangolo di cui si conosca l'area e la somma, o la differenza tra i lati.

Ambedue questi problemi si trovano infatti risolti anche indipendentemente dal ricorso alle proporzioni, nell'opera d' Eu-

Digitized by Google

CLIDE che porta il titolo di *Dati* (*Δεδομένα*), nelle proposizioni 84ª e 85ª.

La generalizzazione che di essi, come vedemmo, EUCLIDE ottiene mediante l'impiego delle proporzioni ha grande importanza nella storia della Geometria, in quanto ha fornito in seguito a APOLLONIO la base per la sua trattazione delle proprietà delle coniche. I nomi stessi che queste da lui ricevettero (*ὑπερβολή*, *ἔλλειψις*, *παραβολή*) in sostituzione a quelli che le designavano anteriormente (come si vede per es. in ARCHIMEDE), conservano oggi ancora la traccia di questo ordine di considerazioni.

§ 9. **Volumi.** — Le applicazioni della teoria delle proporzioni al confronto dei volumi di prismi e parallelepipedi si trovano, come è noto, esposte nel Libro XI degli *Elementi*.

La dimostrazione dei relativi teoremi non presenta alcuno speciale interesse procedendo essa per via affatto analoga a quella seguìta pel caso delle figure piane considerate nel Libro VI.

Di maggiore importanza sono le applicazioni che si trovano fatte, nel Libro XII, del metodo cosiddetto di *esaustione* alla determinazione del rapporto delle superficie di due cerchi (prop. 2ª).

§ 10. **Critiche e varianti di testi.** — La teoria delle proporzioni che finiamo ora di esporre nei suoi tratti fondamentali è stata riguardata, a ragione, come una delle parti teoricamente più perfette degli *Elementi* d' EUCLIDE. Per citare le parole di uno dei più illustri tra i geometri che cooperarono a metterne in luce lo spirito e a difenderla dalle viziose interpretazioni, il BARROW:

« *There is nothing in the whole body of the* Elements *of a more subtle invention, nothing more solidly established and more accurately handled than the theory of proportionals* » (1).

Le obbiezioni critiche sollevate contro di essa già fin dal primo risorgere delle speculazioni geometriche nei tempi moderni, quando non siano dovute a malintesi fondamentali relativi all'ufficio e allo scopo che ad essa vanno assegnati nell'insieme della trattazione euclidea, hanno tutte in comune il carattere di poter venir facilmente rimosse senza menomamente compromettere la compagine e la coerenza dell' intera teoria.

Più che a riconoscere dei difetti di questa, la maggior parte

(1) BARROW, *Lect. math.*, pag. 336.

Digitized by Google

di esse ci guidano a sospettare, e nello stesso tempo a indicarci il modo di correggere, dei guasti (mutilazioni, aggiunte, semplificazioni, sovrapposizioni ecc.) che l'esposizione primitiva ebbe a subire nelle successive redazioni e traduzioni attraverso alle quali essa è giunta fino a noi.

Di ciò, in più d'un caso, ci son rimaste tracce, emergenti in modo evidente dal confronto del testo greco che possediamo, corrispondente come si ritiene alla redazione di TEONE ALESSANDRINO, colle prime traduzioni latine, in particolare quelle del CAMPANO (secolo XIII), eseguite col sussidio di manoscritti arabi.

Un esempio caratteristico di tal fatto ci è fornito dalle obbiezioni che già fin dal CLAVIUS (1580) furono sollevate contro la dimostrazione della proposizione 18ª relativa all'operazione di « comporre » i termini di una proporzione, di passare cioè dalla proporzione $a : b = c : d$ all'altra $a + b : b = c + d : d$.

Si è osservato che essa, come si trova esposta sul testo originale, si basa su un presupposto del quale EUCLIDE non fa uso in alcuna altra parte della sua trattazione e che non figura neppure da lui enunciato sotto qualsiasi forma tra i suoi postulati.

Tale presupposto è quello che date tre grandezze A, B, C (di cui s'intende le due prime soddisfino al postulato d'ARCHIMEDE) esista sempre una quarta grandezza D tale che si abbia:

$$A : B = C : D.$$

La dimostrazione infatti che EUCLIDE dà di questa proposizione ha la forma di una dimostrazione per riduzione all'assurdo nella quale si fa vedere che la quarta proporzionale, supposta esistente, dopo le tre grandezze: $A + B$, B, $C + D$, non può essere nè maggiore nè minore di D.

Da alcuni tra i commentatori degli *Elementi* (dal CLAVIUS, per esempio) si ritenne quindi necessario inserire l'espressa enunciazione del suddetto presupposto tra le proposizioni fondamentali (definizioni, postulati) che figurano in principio al Libro V.

Di ciò non si accontentarono altri riputando che esso non meritasse di essere riguardato come una proposizione evidente e non bisognevole o non suscettibile di dimostrazione.

Tra questi il SACCHERI che, dopo averlo qualificato come un postulato indecoroso (*parum decorum*) e aver parlato del bisogno di ricorrervi come di un altro « neo » della trattazione eu-

Digitized by Google

clidea da porre accanto a quello consistente nell'ammissione del postulato delle parallele, propone di sostituire ad esso la seguente altra proposizione che egli ritiene essere riuscito a dimostrare:

« *Il rapporto di due grandezze qualunque è sempre o uguale o maggiore o minore* (nel senso definito da EUCLIDE) *di quello di altre due grandezze qualunque* ».

Altri infine e tra questi ROBERTO SIMSON, nelle sue *Note agli « Elementi »* d'EUCLIDE (Edimburgo, 1781, pag. 322), non esitano a dichiarare senz'altro spuria e dovuta a interpolazione di TEONE o di qualche altro Autore anteriore, la suaccennata dimostrazione della prop. 18ª.

Tale opinione è resa tanto più probabile dal fatto che nell'edizione latina degli *Elementi*, già accennata indietro, effettuata dal CAMPANO colla scorta della traduzione araba (facendo capo a una redazione greca più antica di quella di TEONE) figura un'altra dimostrazione della proposizione stessa (18ª) nella quale, invece di ricorrere al procedimento visto sopra di riduzione all'assurdo, si cerca seguire una via analoga a quella seguìta da EUCLIDE nella dimostrazione del teorema antecedente (17ª), e in cui non è necessario alcun ricorso al postulato dell'esistenza della quarta proporzionale.

Tale dimostrazione, riportata dal CAMPANO, per quanto incompleta e, per sè, come vedremo, non concludente, non ha tuttavia bisogno che di essere corredata di qualche limitazione o aggiunta per dar luogo a una dimostrazione perfettamente corretta e indipendente da qualsiasi presupposto non compreso tra quelli da EUCLIDE espressamente enunciati.

Essa consiste infatti nell'osservare che in virtù della definizione stessa di proporzione le quattro quantità a, b, c, d costituenti la proporzione considerata dovranno essere tali, che scelti comunque due numeri interi m, n (dei quali il primo è tacitamente supposto maggiore del secondo) si abbia sempre:

$$(m - n)\, c \gtreqless nd$$

a seconda che si ha rispettivamente:

$$(m - n)\, a \gtreqless nb$$

Il che equivale a dire che si dovrà avere:

$$mc \gtreqless n\,(c + d)$$

Digitized by Google

a seconda che si abbia rispettivamente:

$$ma \gtreqless n\,(a + b)$$

Per poter tuttavia da ciò concludere, come si fa nel testo del CAMPANO, che le quattro grandezze a, $a + b$, c, $c + d$ soddisfano alla definizione euclidea di proporzione, rimane ancora da esaminare se la condizione suddetta, oltrechè per qualunque coppia di numeri m, n di cui il primo sia maggiore del secondo, si verifichi anche pei casi in cui si abbia invece $m \leqq n$.

Ciò risulta immediatamente dal solo notare che in ambedue tali casi si ha sempre, contemporaneamente:

$$ma < n\,(a + b) \quad \text{ed} \quad mc < n\,(c + d).$$

Non è improbabile del resto che questa aggiunta la quale basta per rendere la dimostrazione riportata dal CAMPANO pienamente soddisfacente, fosse da lui come da altri che pure l'ammisero, (ad es. il TARTAGLIA) riguardata come troppo ovvia per essere espressamente indicata.

Nè questo è il solo caso nel quale le varianti che presentano i testi utilizzati dal CAMPANO permettono di ricostruire ciò che con tutta probabilità corrisponde a una esposizione più genuinamente euclidea di quella del testo greco pervenuto a noi.

Lo stesso si verifica, per esempio, anche per l'obbiezione sollevata dal PELETARIO (PELLETIER) contro la dimostrazione della proposizione 5ª pel fatto che in essa si suppone implicitamente la divisibilità di una delle grandezze considerate in un numero qualunque di parti uguali.

E anche qui il confronto colla traduzione del CAMPANO dal testo arabo, nel quale questo inconveniente è evitato, viene a confermare l'ipotesi già abbastanza plausibile per se stessa, che la suddetta critica piuttosto che ad EUCLIDE deve essere rivolta a qualcuno dei suoi rimaneggiatori o semplificatori anteriori a TEONE.

Un'altra dimostrazione imperfetta è quella della prop. 10ª, il cui vizio, come osserva il SIMSON nel proporre la correzione, sta in ciò che essa presuppone senza che prima sia stato dimostrato che un rapporto non possa essere nello stesso tempo più grande e più piccolo di un altro.

Il SIMSON stesso nota la mancanza anche di altri teoremi la cui dimostrazione, del resto facilmente ottenibile, è presupposta

Digitized by Google

in dimostrazioni successive, ed attribuisco a ragione tali omissioni a ciò che essi sono stati riguardati dai redattori del testo euclideo come troppo evidenti, come divengono infatti quando si attribuisca alla parola rapporto il senso aritmetico applicabile solo al caso delle grandezze commensurabili.

§ 11. **Questioni di ordinamento.** — Passando dalle suddette osservazioni relative alla trattazione generale delle proporzioni (Libro V) a quelle che si riferiscono alle applicazioni geometriche (Libro VI) se ne presenta una riferentesi a un punto che interessa non tanto la legittimità o sufficienza di qualche particolare dimostrazione ma bensì l'ordine e le relazioni di dipendenza tra le varie parti della teoria.

Il teorema di TALETE sulla proporzionalità dei segmenti determinati su due lati d'un triangolo da una parallela al terzo, è, come si è veduto, dimostrato da EUCLIDE ricorrendo a considerazioni di equivalenza di triangoli.

Il dimostrarlo direttamente, col ricorso immediato alla definizione di grandezze proporzionali (in modo analogo a quello che EUCLIDE segue, per esempio, nella dimostrazione della proporzionalità delle aree alle basi in triangoli di eguale altezza) rende possibile un aggruppamento che pur non discostandosi essenzialmente da quello euclideo mette forse meglio in luce i legami di dipendenza tra vari gruppi di proposizioni dimostrate nel Libro VI (1).

Ad un primo gruppo possono essere attribuite le proposizioni deducibili direttamente dalla definizione di uguaglianza di rapporti, e le conseguenze che rispettivamente ne dipendono, limitandoci, per brevità, alla Geometria piana:

1) Il teorema di TALETE, e le proporzioni relative ai triangoli equiangoli che vi si riattaccano, cui si potrebbe aggiungere la proporzione fra i segmenti determinati dall'intersecarsi di due corde in un cerchio.

2) La proporzionalità dei triangoli o parallelogrammi di uguale altezza alle loro basi, da cui (usando ancora della proprietà transitiva dell'uguaglianza di rapporti) si deduce la proporzione cui dànno luogo due triangoli o parallelogrammi equivalenti con un angolo uguale.

(1) Cfr. p. es. gli *Elementi di Geometria* di ENRIQUES-AMALDI. Di tale ordinamento adottato in molti testi moderni non abbiamo potuto constatare l'origine.

Digitized by Google

3) La proporzionalità degli archi agli angoli al centro nel cerchio.

Il riunire in un solo gruppo tali proposizioni ha il vantaggio di mettere in luce il fatto che nella dimostrazione dei tre teoremi fondamentali 1) 2) 3) e degli analoghi nella Geometria solida, è applicato un medesimo procedimento, che può essere formulato in termini generali, nel modo seguente:

Si abbiano due classi di grandezze $A, B, C....$, $A', B', C'....$ tali che possano essere riferite tra loro in una corrispondenza univoca e reciproca godente della proprietà che alla somma $A + B$ di due grandezze dell' una corrisponda la somma $A' + B'$ delle grandezze A', B' dell'altra, che corrispondono ad A, B rispettivamente.

Si avrà allora che prese due grandezze qualunque A, B della prima classe e le corrispondenti A', B' della seconda si avrà:

$$A \gtreqless B$$

a seconda che si abbia:

$$A' \gtreqless B'.$$

Inoltre a un multiplo qualunque d' una grandezza della prima classe corrisponderà, nella seconda, l'equimultiplo della grandezza corrispondente.

Ciò basta perchè si possa dedurre che se A e B sono due grandezze della prima classe e A', B' due grandezze della seconda, sussiste la proporzione:

$$A : B = A' : B'.$$

Al gruppo delle proposizioni in tal modo deducibili dalla definizione di proporzionalità fa seguito l'altro costituito dalle loro inverse.

Esse hanno questo di comune tra loro che le loro dimostrazioni si presentano sotto la forma di ragionamenti per riduzione all'assurdo nei quali, facendo uso della proprietà transitiva dell' uguaglianza di rapporti, si fa vedere che l' ipotesi della falsità della proposizione da dimostrare porterebbe ad ammettere l'esistenza di due grandezze diverse, ambedue quarte proporzionali dopo tre grandezze (1).

(1) È degno di nota che il teorema di TALETE ammette due inversi: quello che è più significativo si deduce dall'altro coll'uso dell'operazione di « comporre », oppure può stabilirsi indipendentemente appoggiandosi alla unicità della divisione di una grandezza in parti proporzionali a due date.

Digitized by Google

Verrebbe infine il gruppo di proposizioni relative al confronto delle aree di triangoli aventi un angolo comune, o di poligoni simili, il gruppo delle proposizioni cioè che si riattacca al concetto di ragione composta.

A tale proposito è da avvertire che la determinazione generale di questo concetto sebbene non si trovi effettuata da EUCLIDE che pel caso speciale delle suaccennate applicazioni geometriche, troverebbe pure il suo posto più naturale e conveniente nella trattazione generale da lui svolta indipendentemente da ogni applicazione alla Geometria.

II. — ULTERIORI SVILUPPI DELLA TEORIA.

§ 12. Sulla tendenza della Geometria greca ad emanciparsi dalle proporzioni. — La precedente rassegna del contenuto del Libro VI degli *Elementi* d' EUCLIDE ci ha presentato più d' un esempio di teoremi di Geometria che, pure essendo, pel loro enunciato, affatto indipendenti da ogni concetto di proporzione e di rapporto, nel senso attribuito da EUCLIDE a queste parole, tuttavia sono da lui dimostrate mediante il ricorso a considerazioni basate sulle proprietà delle grandezze proporzionali.

Tra tali teoremi se ne trovano anzi perfino di quelli che, nei libri d' EUCLIDE antecedenti ai due che abbiamo esaminati, figurano già dimostrati per via affatto diversa e non implicante l' impiego della teoria svolta nel Libro V.

È questo il caso, per esempio, per il teorema di PITAGORA del quale EUCLIDE dopo aver dato, nel Libro I, la nota dimostrazione di cui gli si attribuisce la scoperta, dà poi, come vedemmo, nel Libro VI, un'altra dimostrazione che unisce al vantaggio della maggior semplicità anche l'altro di condurre immediatamente a una conclusione di portata assai più generale.

Lo stesso avviene anche per la dimostrazione relativa alla costruzione del lato del decagono regolare, la quale è data prima (Libro II) mediante il solo ricorso a considerazioni di equivalenza di rettangoli, ed è in seguito, come vedemmo (nel Libro VI), presentata come caso particolare di un' altra basata essenzialmente sulla proprietà delle figure simili.

E neppure mancano casi di teoremi i quali, non ostante siano assai più facilmente e direttamente dimostrabili coll'applicazione

Digitized by Google

della teoria delle proporzioni, pure non sono da EUCLIDE ottenuti ricorrendo ad essa, ma bensì solo per via assai più lunga e laboriosa nella quale tale ricorso è evitato.

Ne fornisce un esempio caratteristico il teorema relativo all'equivalenza dei rettangoli costruiti coi segmenti determinati dall'intersecarsi di due corde d'un cerchio, teorema che EUCLIDE, come è noto, deduce dal teorema di PITAGORA.

Non è improbabile che la preferenza accordata in questi casi da EUCLIDE alle dimostrazioni indipendenti dal concetto di proporzione, rappresenti, come ritiene lo ZEUTHEN, una traccia, o una parziale sopravvivenza dei processi dimostrativi ai quali i geometri greci erano obbligati a ricorrere prima che l'introduzione della teoria generale delle proporzioni, dovuta come vedemmo ai predecessori immediati di EUCLIDE, avesse tolto le restrizioni che impedivano di estendere il concetto di rapporto anche al caso delle grandezze incommensurabili.

Della particolare elaborazione alla quale la teoria dell'equivalenza era stata assoggettata dai geometri greci a causa appunto della necessità in cui essi si trovarono di doverla applicare alla soluzione di questioni che solo posteriormente divennero suscettibili di esser trattate col ricorso a considerazioni di rapporti e di proporzioni, ci rimangono del resto tracce notevoli anche negli scritti di altri Autori quali APOLLONIO e PAPPO, come avremo occasione di constatare più avanti.

§ 13. **Giordano Vitale da Bitonto.** — Le ricerche dirette a utilizzare quanto più fosse possibile, nelle dimostrazioni geometriche, le considerazioni riferentisi a confronti di aree a preferenza di quelle implicanti il concetto di rapporto o di proporzione, non potevano tuttavia a meno che perdere la più gran parte del loro interesse col cessar del motivo che aveva loro dato origine.

È sotto un aspetto affatto diverso che, col rinascere delle speculazioni geometriche, ricompare la tendenza a sostituire ai procedimenti mediante i quali EUCLIDE applica la sua teoria generale delle proporzioni alla dimostrazione di teoremi di Geometria, altri procedimenti nei quali queste ultime venissero ottenute in modo più diretto e meno soggette alle obbiezioni che contro la teoria generale e contro qualche parte di essa potevano venir sollevate.

A un primo tentativo in questa direzione sembra aver fornito occasione il desiderio di attribuire un significato alla definizione

Digitized by Google

senza dubbio spuria (manca infatti nel testo del CAMPANO, e non è del resto adoperata da EUCLIDE in alcuna dimostrazione) di « ragione composta » che si trova in principio al Libro VI.

In essa è detto che per rapporto « composto di altri due » si debba intendere il rapporto che risulta dal « moltiplicare » i loro rispettivi « valori » (πηλικότητες).

Proponendosi di determinare che cosa si dovesse intendere per prodotto di due rapporti, nel caso che le grandezze tra le quali essi sussistono non fossero commensurabili, VITALE GIORDANO da Bitonto (1) fu condotto a domandarsi se non fosse possibile, pel caso dei segmenti almeno, attribuire alle parole « rapporto » e « prodotto » un senso basato su considerazioni puramente geometriche, e indipendente quindi da qualunque ipotesi relativa alla commensurabilità o non commensurabilità dei segmenti in questione.

A tale scopo egli propone, nel suo *Euclide restituto* di definire come « prodotto » di due segmenti a, b il segmento x determinato dalla condizione seguente:

$$x : a = b : 1$$

(ove 1 rappresenta un segmento arbitrario fissato come unità) e di intendere come « quoziente » di due segmenti a, b il segmento y determinato dalla condizione:

$$a : b = y : 1.$$

I prodotti e i quozienti di due segmenti qualunque vengono in tal modo a esser definiti come degli altri segmenti, costruibili, quando i primi siano dati, col ricorso del teorema di TALETE (col portare, cioè, in ordine conveniente il segmento scelto come unità e i due segmenti dati sui due lati d'un angolo a partire dal vertice e conducendo per uno dei punti così ottenuti una parallela alla congiungente gli altri due).

I segmenti ottenuti in tal modo come prodotti o quozienti di dati segmenti possono poi alla loro volta essere di nuovo assoggettati a operazioni di « prodotto » e di « divisione » (nel senso sopra definito), dando luogo a nuovi segmenti e in particolare a segmenti che risulteranno come *prodotti di quozienti* (o di rapporti) di altri segmenti.

(1) *Euclide restituto*, Roma, 1680.

Digitized by Google

Delle operazioni così definite VITALE GIORDANO dimostra un certo numero di proprietà, basandosi s' intende sulle proposizioni dimostrate da EUCLIDE nel Libro V per le grandezze in generale.

Tra tali proprietà sono da notare le seguenti:

1) Se due segmenti a, b si « moltiplicano » per uno stesso segmento c, i due segmenti p, q che si ottengono soddisfano alla condizione:

$$a : b = p : q.$$

2) Se sussiste la proporzione

$$a : b = c : d$$

il prodotto dei due segmenti a, d (rispetto a qualsiasi unità) è uguale a quello dei due segmenti b, c (rispetto alla stessa unità).

Segue una proposizione che asserisce ciò che si esprimerebbe in linguaggio moderno dicendo che il prodotto di segmenti sopra definito gode della proprietà « associativa »:

3) Se si hanno tre segmenti a, b, c il prodotto di a pel segmento prodotto di b e c è un segmento eguale a quello che si ottiene moltiplicando invece a per b e facendo il prodotto del segmento ottenuto pel segmento c.

4) Il prodotto del « quoziente » di due segmenti a, b, per il segmento b è uguale al segmento a.

Ciò premesso egli passa a dimostrare, ricorrendo, s' intende, sempre alle proporzioni dimostrate da EUCLIDE nel Libro V, che se si ha un numero qualunque di segmenti, il prodotto dei quozienti che si ottengono dividendo ciascuno di essi per il successivo è uguale al quoziente del primo di essi per l' ultimo.

La dimostrazione che egli dà di questa proposizione, nel caso speciale che i segmenti dati siano soli tre, si riduce in sostanza alla seguente:

Se a, b, c sono i tre segmenti dati, i quozienti del primo per il secondo e del secondo per il terzo saranno rispettivamente i due segmenti x, y determinati dalle seguenti due condizioni:

[1] $$a : b = x : 1$$

[2] $$b : c = y : 1$$

e il prodotto di x per y sarà, per definizione, il segmento z determinato dalla condizione

[3] $$z : x = y : 1.$$

Digitized by Google

Si indichi ora con z' il quoziente di a per c, cioè il segmento determinato dalla condizione:

[4] $$a : c = z' : 1.$$

Il confronto delle due proporzioni [2], [4], dà immediatamente

$$a : b = z' : y.$$

Da questa e dalla [1] si deduce immediatamente:

$$z' : y = x : 1$$

cioè:

$$z' : x = y : 1.$$

Questa colla 3) dà:

$$z' : x = z : x$$

da cui si conclude:

$$z = z',$$

la quale dice appunto che il prodotto z dei due quozienti di a per b e di b per c è un segmento uguale al segmento z' che è il quoziente di a per c.

In modo affatto analogo procede la dimostrazione riguardante il caso particolare in cui i segmenti dati a, b, c.... siano in proporzione continua, il caso cioè in cui i rapporti da « moltiplicare » siano tutti uguali tra loro (ragione « duplicata » « triplicata » ecc.) (1).

§ 14. **Hermann Grassmann**. — Le considerazioni sopra esposte di VITALE GIORDANO, nel mentre non presentano alcuna affinità con quelle dei geometri greci, che abbiamo accennato indietro, miranti a rendere indipendenti dalla teoria generale delle proporzioni, degli speciali teoremi di Geometria, si collegano invece per più d'un interessante punto di contatto alle speculazioni posteriori di cui ora passeremo a occuparci, aventi per scopo di costruire, indipendentemente dalla definizione di EUCLIDE e dei presupposti che essa implica (postulato di ARCHIMEDE) una teo-

(1) Interessanti dal lato storico sono le parole che GIORDANO VITALE premette alle considerazioni suesposte: « *Prima d'inoltrarmi nella compositione delle proportioni dottrina tanto più difficile a essere intesa quanto che nasce da principio non dimostrato sino ad ora nè da Euclide, nè, che io sappia, da alcun altra persona* » (*Euclide restituto*, pag. 261).

Digitized by Google

ria geometrica atta a surrogare completamente quella svolta nel Libro II d'EUCLIDE, per quanto riguarda almeno le sue applicazioni al caso dei segmenti.

È nell'*Ausdehnungslehre* di GRASSMANN (1844) che questo concetto sembra aver trovato la sua prima realizzazione.

GRASSMANN comincia coll'osservare (§ 75) come tra le proprietà geometriche caratteristiche dei segmenti proporzionali se ne presentano due ugualmente atte a servire da criterio o di base per una nuova definizione di proporzionalità fra segmenti.

L'una è quella che consiste nell'equivalenza dei due rettangoli (o parallelogrammi aventi angoli rispettivamente uguali) che abbiano per lato rispettivamente il primo e il quarto, e il secondo e il terzo dei segmenti dati.

L'altra è quella enunciata dal teorema di TALETE, e consistente nel parallelismo delle due rette che congiungono il primo e il terzo e il secondo e il quarto dei quattro punti che si ottengono portando ordinatamente sui lati d'un angolo, a partire dal vertice, i quattro segmenti in questione, i primi due su un lato e gli altri due sull'altro.

Le due definizioni di « proporzione » fra segmenti che GRASSMANN adotta in corrispondenza all'una e all'altra delle due suaccennate proprietà, si riferiscono non soltanto alla lunghezza ma anche alla direzione dei segmenti considerati.

Esse sono le seguenti:

1) Quattro segmenti, di cui i due primi e i due ultimi siano paralleli tra loro e dei quali i due primi non siano paralleli ai due ultimi, si diranno costituire una proporzione quando i parallelogrammi costruiti rispettivamente con lati paralleli al primo e al quarto, e al secondo e al terzo di essi abbiano eguale area.

2) Quattro segmenti, nelle stesse condizioni sopradescritte, si diranno costituire una proporzione quando, costruiti due triangoli aventi lati uguali e paralleli rispettivamente al primo e terzo e al secondo e quarto di essi, si abbia che in essi i terzi lati siano paralleli tra loro.

Le condizioni espresse dall'una e dall'altra di queste due definizioni sono da GRASSMANN mostrate immediatamente esser deducibili l'una dall'altra, col sussidio delle sue notazioni simboliche.

Per vedere come ciò si effettui basta solo ricordare come egli chiami *somma* di due segmenti a, b, il segmento OC che si ottiene

Digitized by Google

conducendo per un punto O un segmento OA eguale e parallelo al primo di esso e pel punto A un segmento AC eguale e parallelo al secondo e congiungendo O con C; e come egli chiami *prodotto* di due segmenti a, b, l'area del parallelogrammo avente lati rispettivamente uguali e paralleli ad essi.

Da quest'ultima definizione deriva che condizione necessaria e sufficiente perchè due segmenti siano paralleli è che il loro prodotto sia nullo. Si potrà quindi esprimere il verificarsi della condizione espressa dalla definizione 2) per quattro segmenti a, b, c, d scrivendo:

$$(a + c)(b + d) = 0.$$

E poichè l'operazione sopra definita come « prodotto » gode, rispetto a quella che si è definita come « somma » della proprietà distributiva, si avrà eseguendo le operazioni indicate nella suddetta formola, e tenendo conto che si ha $ab = 0$ e $cd = 0$ (a causa del supposto parallelismo di a, b e di c, d),

$$ad + cb = 0,$$

ossia (date le regole dei segni di GRASSMANN)

$$ad = bc,$$

la quale esprime appunto l'equivalenza delle aree dei due parallelogrammi considerati nella definizione 1).

Riconosciuta in tal modo l'identità delle due condizioni considerate nelle due definizioni da lui proposte, GRASSMANN prende le mosse dalla 2ª di esse, che può anche enunciarsi come segue:

« Se due triangoli hanno i tre lati rispettivamente paralleli, due lati dell'uno e i corrispondenti dell'altro costituiscono una proporzione ».

Per dimostrare in base a questa definizione che, se sussistono le due proporzioni

[1] $$a : b = c : d$$

[2] $$a : b = e : f$$

sussiste anche l'altra:

$$c : d = e : f,$$

egli procede nel modo seguente:

Si portino sopra una retta avente la direzione dei due seg-

Digitized by Google

menti paralleli a, b, (fig. 3) a partire da un punto O, due segmenti OA, OB rispettivamente uguali ad a, b.

Per A, B si conducano due segmenti AC, BD rispettivamente uguali e paralleli a c, d. Le due congiungenti OC, OD dovendo pel sussistere della proporzione [1] riescire parallele, i tre punti O, C, D saranno in linea retta.

Se ora per A, B si conducono due altri segmenti uguali e paralleli AE, BF ad e, f anche gli estremi E, F di questi saranno, in virtù della proporzione [2], allineati con O.

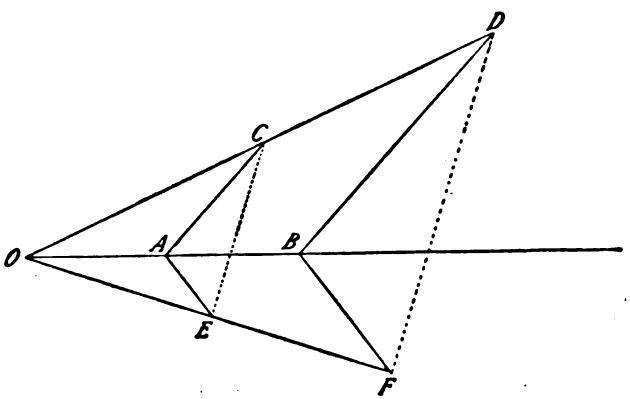


Fig. 3.

I due triangoli ACE, BDF avendo quindi due coppie di lati paralleli ed essendo tali che le tre congiungenti le coppie di vertici omologhi concorrono in O, avranno paralleli anche i terzi lati CE, DF, il che equivale a dire che sussiste la proporzione

$$AC : BD = AE : BF$$

cioè:

$$c : d = e : f.$$

La proposizione da dimostrare viene in tal modo a comparire come un' immediata conseguenza del teorema di Desargues.

Un caso che rimane da considerare, e nel quale la costruzione assunta a criterio di proporzionalità cessa di essere direttamente applicabile è quello nel quale i quattro segmenti siano tutti e quattro paralleli tra loro (e non soltanto i primi due tra loro e gli ultimi due pure).

Digitized by Google

Per determinare che cosa si debba intendere, anche in questo caso, per proporzionalità dei segmenti in questione, GRASSMANN procede nel modo seguente:

Osserva anzitutto come, in virtù della proposizione antecedentemente dimostrata, date due coppie di segmenti costituenti una proporzione, se ne possa sempre determinare un'altra costituente una proporzione con ciascuna di esse.

Si ha quindi in questa proprietà un nuovo criterio per giudicare se due coppie di segmenti costituiscano una proporzione. E poichè questo nuovo criterio non cessa di aver senso anche nel caso che i segmenti costituenti le due coppie in questione siano tutti paralleli fra loro, nasce la convenienza di assumere tale nuovo criterio a base di una nuova definizione di proporzionalità la quale comprende la prima come caso particolare.

Anche per questa nuova definizione vale la proprietà, dimostrata indietro, che se due coppie di segmenti sono proporzionali a una stessa coppia, esse sono proporzionali fra loro.

Il che è tutto ciò che si richiede perchè sia lecito, anche in corrispondenza ad essa, concepire una « proporzione come un'uguaglianza di rapporti », come una relazione cioè tra coppie di segmenti soddisfacente alle proprietà caratteristiche della relazione di uguaglianza (1).

§ 15. **L. Rajola Pescarini.** — Le suddette considerazioni di GRASSMANN non sembrano aver esercitato immediatamente alcuna azione per far rivolgere l'attenzione dei matematici alle questioni che esse implicavano o suggerivano.

Affatto indipendenti da esse si presentano infatti, un quarto di secolo più tardi, i primi tentativi di costruire, in base a definizioni puramente geometriche, una teoria atta a sostituire, per quanto riguarda almeno il caso dei segmenti, quella che EUCLIDE appoggia alla sua definizione di proporzionalità.

Tra questi tentativi, riferentisi non più, come quello di GRASSMANN, ai segmenti considerati in grandezza e direzione, ma semplicemente ai segmenti considerati in riguardo alla loro grandezza, sono da notare i seguenti tre, succedentisi indipendentemente, a breve distanza l'uno dall'altro:

1) Quello di LUIGI RAJOLA PESCARINI esposto in un opu-

(1) GRASSMANN, *Ausdehnungslehre*, 1884, § 78.

Digitized by Google

scolo pubblicato a Napoli nel 1876 col titolo: *Studio sulla proporzionalità grafica e sue applicazioni alla similitudine e alla omotetia.*

2) Quello di R. Hoppe, contenuto in un articolo pubblicato nel 1882 nell' « Archiv. für Mathematik und Physik » (Leipzig) da lui diretto, col titolo: *Rein geometrische Proportionslehre.*

3) Quello di G. Blasi da lui esposto in un Corso di Lezioni sulla teoria delle proporzioni, tenuto ai suoi allievi dell' Istituto tecnico di Sassari, e da questi riprodotto in fogli poligrafati (Sassari, 1882).

Lo scopo che il Rajola Pescarini si propose nel suo opuscolo è da lui indicato come quello di « mettere i giovani in grado di studiare le importantissime proprietà racchiuse nella teoria della simiglianza, della omotetia e di altre di simil genere: e ciò indipendentemente dal Libro V di Euclide e dall'*Aritmetica* ».

Prendendo le mosse da un angolo determinato, su uno dei cui lati siano portati a partire dal vertice O due segmenti in OA, OB (fig. 4), egli definisce come « proporzionali » ad OA, OB le coppie di segmenti OC, OD che si possono ottenere conducendo da A, B due rette parallele tra loro fino ad incontrare in C e D l'altro lato dell'angolo.

Per dimostrare, in base a questa definizione, il teorema che il rettangolo di due segmenti che figurino come termini estremi d'una proporzione è equivalente al rettangolo dei termini medi, egli ricorre al teorema relativo all'equivalenza dei rettangoli costruiti coi segmenti determinati dall'intersezioni di due corde d'un cerchio, teorema che, come già si è visto, Euclide dimostra col solo impiego del teorema di Pitagora.

Gli basta per ciò osservare che portando, nella figura suaccennata, sul lato OD un segmento OB' eguale ad OB e sul lato OA un segmento OC' eguale ad OC, si ottiene un quadrilatero $AB'C'D$ avente gli angoli opposti supplementari e di cui quindi i vertici si trovano su una stessa circonferenza.

Questo teorema gli permette immediatamente di concludere che se quattro segmenti soddisfano per un determinato angolo, alla condizione da lui adottata per definire la proporzionalità, essi vi soddisferanno anche in corrispondenza a qualsiasi altro angolo; in altre parole: Se due triangoli sono simili lo saranno pure anche due altri qualunque che si possano ottenere portando ordinatamente sui due lati di due angoli eguali qualunque due coppie di loro lati omologhi.

Digitized by Google

Un'altra conseguenza immediata della suddetta proposizione è quella dell'invertibilità dei termini medi, o estremi d'una proporzione.

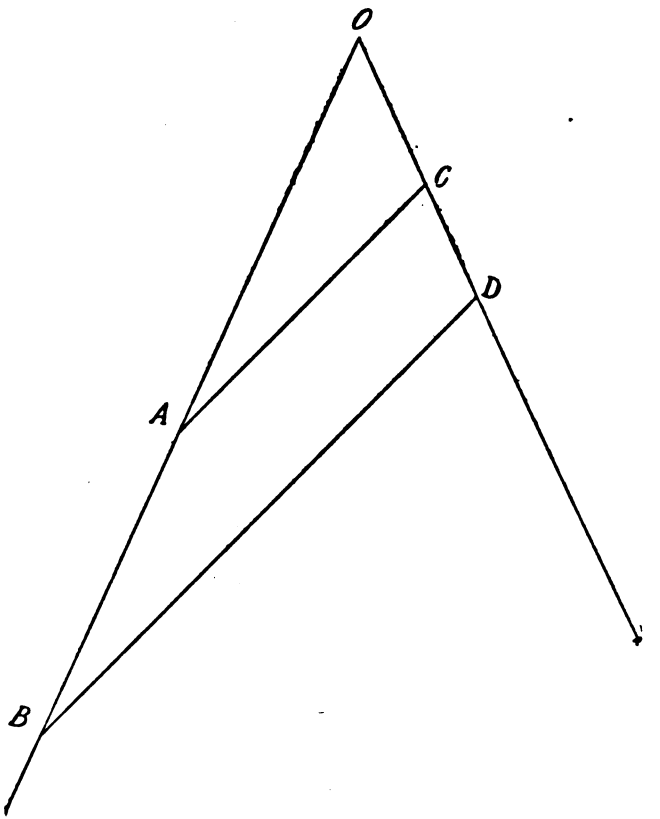


Fig. 4.

Per dimostrare invece che se due coppie di segmenti sono proporzionali a una stessa coppia esse sono proporzionali fra loro, il Rajola premette il teorema:

Se le tre coppie di segmenti aa', bb', cc' costituite dai lati di due triangoli ABC, $A'B'C'$, sono proporzionali tra loro, i due triangoli hanno gli angoli corrispondenti rispettivamente uguali.

Si costruisca infatti un triangolo avente angoli rispettiva-

Digitized by Google

mente uguali a quelli di ABC e avente il lato, che corrisponde ad AC, eguale ad $A'C'$ (fig. 5).

Se indichiamo con x e y gli altri due suoi lati si avrà:

$$a : x = b : b'$$
$$c : y = b : b'$$

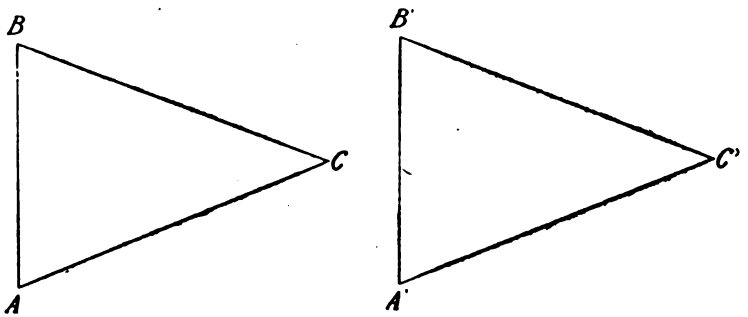


Fig. 5.

dalle quali, in virtù del sussistere delle due proporzioni:

$$a : a' = b : b'$$
$$c : c' = b : b'$$

si ricava:

$$x = a', \quad y = c'.$$

Si abbiano ora due proporzioni

$$a : b = c : d$$
$$a : d = e : f.$$

Coi tre segmenti a, c, e (fig. 6) si costruisca un triangolo, e così pure coi tre segmenti b, d, f. Pel teorema precedente i due triangoli

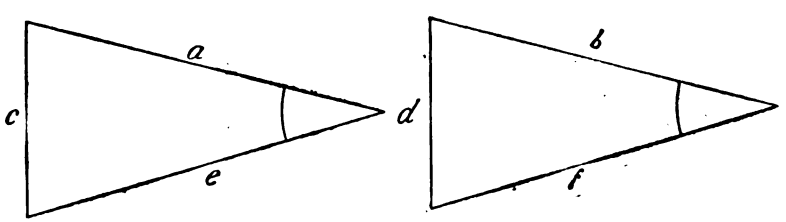


Fig. 6.

avranno gli angoli corrispondenti rispettivamente uguali. Ne deriva che si potranno collocare in modo che l'angolo $\widehat{ae}$ del primo

Digitized by Google

coincida all'angolo $\widehat{bf}$ del secondo e che i lati c, d riescano paralleli fra loro. Dal che si conchiude che è vera anche la proporzione

$$a : b = e : f.$$

Questa dimostrazione, cade in difetto nel caso che le terne a, c, e, e b, d, f, di segmenti considerati non soddisfino alle disuguaglianze intercedenti fra i lati di un triangolo.

È da notare tuttavia che ad essa, se ne può facilmente sostituire un'altra basata invece sulla considerazione dei due cerchi determinati rispettivamente dai punti A, B, C, D e C, D, E, F che si otterrebbero portando in ordine opportuno sui lati d'un angolo qualunque, a partire dal vertice, i segmenti a, b, c, d, e, f.

Poichè infatti le rette AB, EF (fig. 7) formano colla AE angoli corrispondenti uguali (poichè uguali ciascuno all'angolo CDF), i due

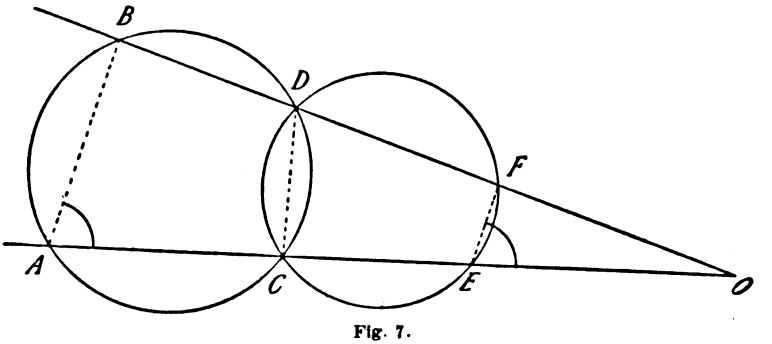


Fig. 7.

triangoli OAB, OEF saranno simili e le due coppie OA, OE, OB, OF saranno proporzionali. Si avrà quindi che il rettangolo di lati a, f sarà equivalente a quello di lati b, e cioè che la coppia di segmenti a, b sarà proporzionale alla coppia e, f come si voleva dimostrare (1).

§ 16. **R. Hoppe.** — Il lavoro del Hoppe si divide in due parti delle quali la prima è dedicata a svolgere una teoria delle proporzioni fra segmenti in base a una definizione analoga a quella che abbiamo testè considerata, l'altra invece a costruire tale teoria

(1) G. Vailati, *Di un modo di riattaccare la teoria delle proporzioni tra segmenti a quella dell'equivalenza.* Vedi « Atti del II Congresso dell'Associazione 'Mathesis' », Livorno, 1902.

Digitized by Google

partendo da una definizione basata sull'altra proprietà caratteristica dei segmenti proporzionali, quella cioè relativa all'equivalenza di rettangoli.

Alla prima di queste due trattazioni l' HOPPE pone a fondamento il teorema seguente che egli dimostra, ricorrendo a una costruzione nello spazio (alla quale sono inopportunamente mescolate delle considerazioni infinitesimali) e che coincide in sostanza col teorema di DESARGUES sui triangoli omotetici.

Se gli angoli che un lato AB d'un quadrilatero (fig. 8) forma coi due lati adiacenti AD, BC e le due diagonali AC, BD sono uguali rispettivamente agli angoli che un lato $A'B'$ d'un altro quadrilatero fa coi lati a lui adiacenti $A'D'$, $B'C'$ e colle diagonali $A'C'$, $B'D'$, allora anche gli angoli che il lato CD del primo quadrilatero fa colle stesse rette suddette AD, BC, AC, BD saranno rispettivamente uguali agli angoli che il lato $C'D'$ del secondo quadrilatero fa con $A'D'$, $B'C'$, $A'C'$, $B'D'$.

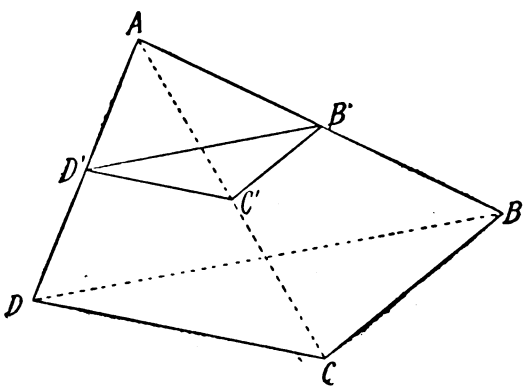


Fig. 8.

Da questo teorema deduce immediatamente l'altro (il quale non ne è d'altronde che un caso particolare):

Se a, b, c, d son quattro segmenti tali che portati, a partire dal vertice sui lati di un angolo, i due primi, per esempio, su un lato e i due altri sull'altro, diano luogo a quattro punti A, B, C, D tali che la retta AC sia parallela ad AD, allora anche se essi sono portati nello stesso ordine sui lati di un altro angolo qualunque verificheranno pure alla stessa condizione (daranno cioè luogo a quattro punti A', B', C', D' situati su due rette parallele).

Questa proposizione gli serve per giustificare la definizione seguente dei segmenti proporzionali:

« Due segmenti a, b si diranno essere proporzionali a due altri c, d quando i primi due e gli ultimi due figurino come lati corrispondenti in due triangoli simili ».

In base a questa definizione egli dimostra immediatamente

Digitized by Google

il teorema della transitività dell'uguaglianza di rapporti e l'altro, che diremo della ragion composta, che permette di dedurre dalle due proporzioni

$$a : b = c : d$$

$$b : e = d : f$$

l'altra :

$$a : e = c : f.$$

Il primo infatti è conseguenza diretta del teorema di DESARGUES sui triangoli omotetici.

Il secondo dice semplicemente che quando si portano sui lati d'un angolo qualunque a partire dal vertice sei segmenti a, e, b, c, d, f, (fig. 9) i primi tre su un lato in OA, OE, OB e gli altri tre sull'altro in OC, OD, OF, se essi sono tali che AC sia parallela a BD e BD parallela ad EF, essi sono pure tali che le congiungenti A con C ed E con F sono parallele tra loro.

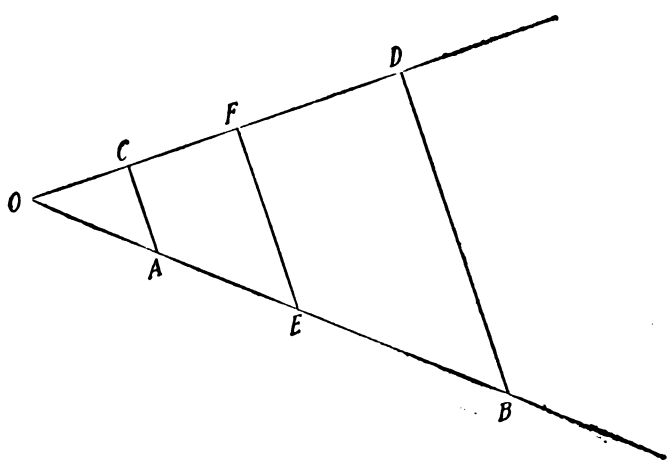


Fig. 9.

Esso coincide quindi coll'asserire che due rette parallele a una terza sono parallele tra loro, cioè che due rette che s'incontrano non possono essere parallele a una stessa retta (postulato 5° d' EUCLIDE).

Per dimostrare, poi, in base alla sopradetta definizione, che, se due segmenti a, b sono proporzionali a due altri c, d, il rettangolo avente per lati il primo e il quarto di essi è equivalente al rettan-

Digitized by Google

golo avente per lati il secondo e il terzo, l' HOPPE porta i primi due a, b e gli ultimi due di essi c, d (fig. 10), rispettivamente sui lati di un angolo retto in OA, OB, OC, OD. Poichè i due triangoli ACB, ACD aventi eguale base e compresi tra le parallele AC, BD sono equivalenti, risultano equivalenti anche gli altri due OBC, OAD che si ottengono aggiungendo a quelli il triangolo OAC. D' onde si conclude che i due rettangoli aventi per lati OA, OD e OB, OC sono equivalenti.

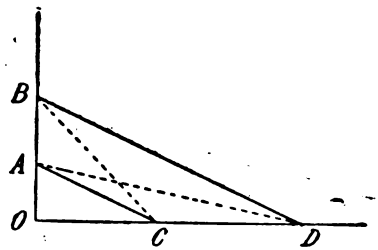


Fig. 10.

Dalle proposizioni sopra esposte l' HOPPE deduce facilmente gli ordinari teoremi sulle proporzioni tra segmenti e sulle proprietà dei triangoli simili.

§ 17. **Seconda trattazione dell' Hoppe-G. Biasi.** — A questa trattazione l' HOPPE ne fa seguire un'altra, nella quale invece si assume a definizione di proporzionalità di due coppie di segmenti a, b e c, d l'equivalenza dei rettangoli aventi per lati rispettivamente a, d e b, c.

Gli occorre allora dimostrare la proposizione che due coppie di lati omologhi di triangoli simili (equiangoli) sono proporzionali.

A tale scopo egli ricorre di nuovo al teorema di DESARGUES (e quindi implicitamente alle considerazioni stereometriche di cui s' è servito per dimostrarlo).

Egli procede nel modo seguente:

Dopo aver collocati i due triangoli simili in questione OAB, $OA'B'$ (fig. 11) in modo da aver comuni le due coppie di lati omologhi delle quali si vuol dimostrare la proporzionalità, e in modo quindi da avere i terzi lati paralleli fra loro, conduce, pel vertice comune, una retta OX perpendicolare a uno dei lati, per esempio, ad OA. Su questa porta a partire da O due segmenti OC, OC' eguali rispettivamente ad OB, OB'. Poichè allora anche le rette BC, $B'C'$, sono parallele, lo saranno anche, pel teorema di DESARGUES, le AC, $A'C'$.

Con che egli riconduce il caso all'altro, già considerato indietro, di due triangoli rettangoli simili e conclude, seguendo il procedimento già visto, che i due rettangoli aventi per lati rispettivamente OA, OB' e OA', OB sono equivalenti.

Per quanto invece riguarda la dimostrazione del teorema

Digitized by Google

che due coppie di segmenti proporzionali a una terza sono proporzionali fra loro egli procede nel modo seguente, ricorrendo al suddetto teorema del gnomone.

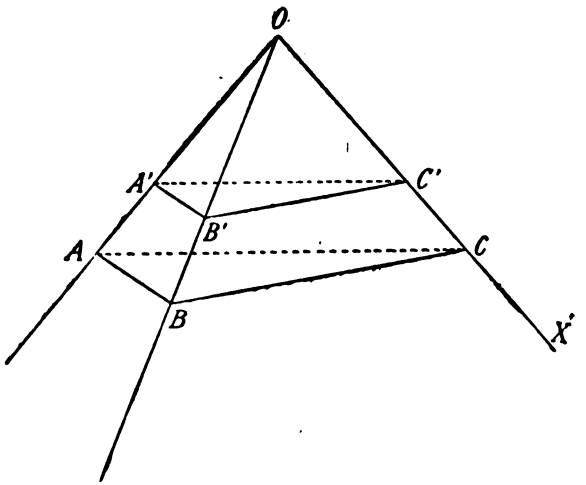


Fig. 11.

Si portino sui lati d'un angolo retto (fig. 12), a partire dal vertice O, i segmenti OA, OE, OC, OB, OF, OD i primi tre su un lato, gli altri tre sull'altro, e uguali rispettivamente ai segmenti a, e, c, b, f, d tra i quali sussistano per ipotesi le due proporzioni:

$$a : b = c : d$$
$$e : f = c : d,$$

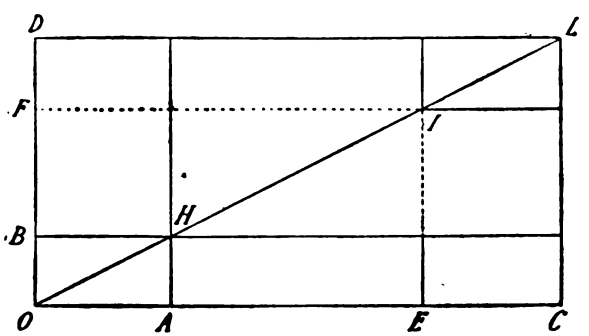


Fig. 12.

e si completino i rettangoli aventi rispettivamente per lati OA, OB; OC, OD; OB, OC; OA, OD. Siano H, L i vertici dei due primi opposti ad O.

Digitized by Google

A causa dell'equivalenza dei due rettangoli $OA \cdot OD$ e $OB \cdot OC$ saranno equivalenti anche i due rettangoli che rimangono togliendo da ciascuno di essi il rettangolo $OA \cdot OB$. Ne segue in virtù del teorema del gnomone che il punto H sarà situato sulla diagonale OL.

Si completi ora il rettangolo $OE \cdot OF$ e sia I il vertice di esso opposto ad O. A causa dell'equivalenza dei rettangoli $OF \cdot OC$, $OD \cdot OE$ si avrà pure sottraendo da ciascuno di essi il rettangolo che hanno in comune, che i rimanenti rettangoli saranno equivalenti e che quindi anche il punto I si trova sulla retta OL.

I punti O, H, I essendo quindi sopra una stessa retta, si avrà che i rettangoli $AH \cdot AE$, $BH \cdot BF$ saranno equivalenti, e aggiungendo a ciascuno di essi il rettangolo $OA \cdot OB$ si otterranno due rettangoli equivalenti che sono $OA \cdot OF$, $OB \cdot OE$. Se ne conchiude che sussiste la proporzione:

$$a : b = e : f$$

come si voleva dimostrare.

In modo analogo a questa seconda trattazione dell'Hoppe procede anche quella del Biasi, basata pure sulla considerazione dell'equivalenza dei rettangoli.

In essa tuttavia invece di ricorrere al teorema di Desargues per dimostrare la proporzionalità dei lati omologhi di triangoli simili si fa uso del teorema relativo alle corde di un cerchio, seguendo il procedimento inverso a quello adoperato, come già vedemmo, dal Rajola Pescarini per dimostrare la proposizione reciproca.

§ 18. **La teoria geometrica delle proporzioni indipendente dalle considerazioni d'equivalenza.** — Un carattere distintivo delle trattazioni della proporzionalità fra segmenti nelle quali si fa ricorso a considerazioni di equivalenza, di fronte a quelle nelle quali tali considerazioni vengono evitate, consiste in ciò che nelle prime l'invertibilità dei medi (o degli estremi) d'una proporzione risulta come conseguenza immediata della definizione, mentre nella seconda si presenta come un teorema, che esige particolare dimostrazione, e che può enunciarsi come segue:

Se i quattro segmenti a, b, c, d (fig. 13) sono tali che, portati a partire dal vertice O sui lati d'un dato angolo in OA, OB, OC, OD i *primi due* su un lato, gli altri due sull'altro dànno luogo a due

Digitized by Google

rette AC, BD parallele, allora anche se questi segmenti si portano sui lati dello stesso o d'un altro angolo, in modo che il *primo* e il

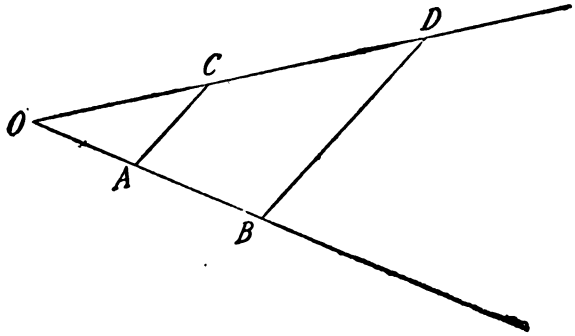


Fig. 13.

terzo di esso si trovino su un lato e il secondo e il quarto sull'altro, (fig. 14) daranno pure luogo a due rette parallele AB, CD.

È da notare che la invertibilità dei medi basta per poter dedurre immediatamente dalla proprietà transitiva dell'uguaglianza di rapporti l'altro teorema che abbiamo chiamato della ragione composta.

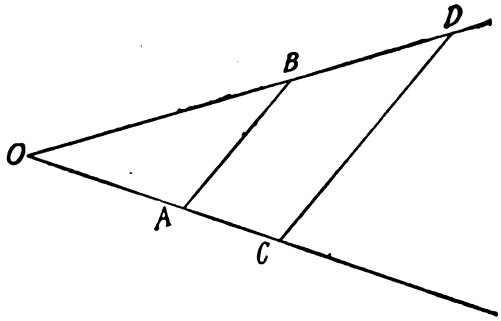


Fig. 14.

Ne segue che quando si ammetta il ricorso alla teoria dell'equivalenza le due proposizioni suddette (proprietà transitiva e ragion composta) si presentano come conseguenze immediate l'una dell'altra, mentre come abbiam già visto indietro, quando si voglia evitare tale ricorso esse devono essere riguardate come esprimenti due fatti geometrici affatto distinti, cioè l'una il teorema di Desargues, l'altra il postulato delle parallele.

Digitized by Google

Un'altra proposizione che si presenta come una conseguenza diretta della definizione di proporzionalità, nel caso che si conceda il ricorso a considerazioni di equivalenza, è quella cosiddetta della proporzione perturbata, quella cioè che permette di passare da due proporzioni:

$$a : b = c : d$$

$$b : e = f : c$$

aventi comuni due termini a una terza fra i termini rimanenti:

$$a : e = f : d.$$

Infatti essa esprime allora soltanto il fatto che due rettangoli equivalenti a uno stesso rettangolo sono equivalenti tra loro.

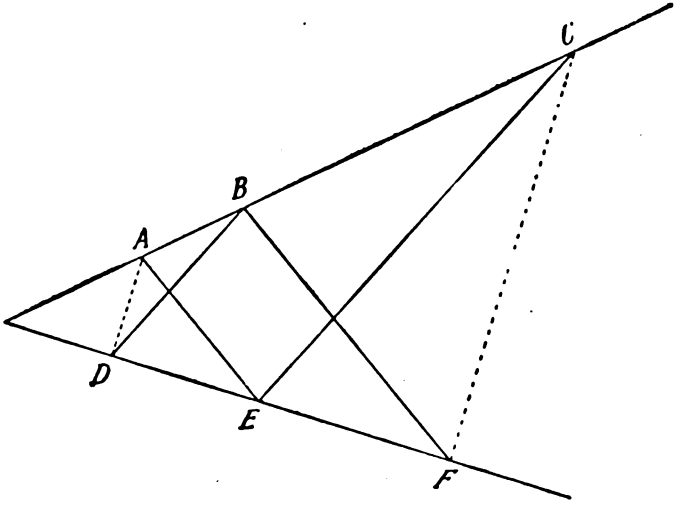


Fig. 15.

Se invece questa proposizione viene interpretata in corrispondenza all'altra definizione di segmenti proporzionali come lati omologhi di triangoli simili, essa viene a coincidere col teorema seguente:

Se nei due lati d'un angolo (fig. 15) si portano a partire dal vertice i segmenti a, b, c, d, e, f, i primi tre su un lato e gli altri tre sull'altro, e se i punti A, B, C, D, E, F così ottenuti sono tali

Digitized by Google

che le rette AE, BF siano parallele tra loro e le BD, EC pure, allora saranno parallele anche le rette AD, CF.

Questa proposizione che non è altro che un caso particolare del noto teorema di PASCAL sull'esagono inscritto in una conica, era conosciuto dai geometri greci: di essa di trova anzi un'elegante dimostrazione nelle « Collezioni » di PAPPO (1), basata però su considerazioni di equivalenza, e quindi non utilizzabile pel nostro scopo che esige appunto che essa sia dimostrata indipendentemente da esse.

Di dimostrazioni di questa proposizione indipendenti dal ricorso alla teoria dell'equivalenza o a costruzioni fuori del piano, ne sono state date parecchie.

Due ne riporta l'HILBERT nella già citata sua opera *Sui fondamenti della Geometria*. Un'altra molto semplice ed elegante ne fu data da F. SCHUR (2) basata sul teorema che le tre altezze d'un triangolo concorrono in un punto.

In quest'ultima è tuttavia considerato solo il caso in cui l'angolo sul cui lato si riportano i segmenti in questione sia retto.

Essa procede nel modo seguente:

Siano OX, OY le dette due rette e $A'B'C'$, ABC (fig. 16) le due terne di punti disposte rispettivamente su esse in modo che si abbia $A'B$ parallela ad AB' e $B'C$ parallelo a BC'. Si conduca per B la perpendicolare ad $A'C$ fino ad incontrare in D' la OY. Il punto C sarà allora il punto d'incontro di due altezze del triangolo $BA'D'$ onde la retta $D'C$ sarà perpendicolare a BA' e quindi ad AB'. Ne segue che C sarà anche il punto d'incontro di due altezze del triangolo $AD'B'$ e quindi che AD' sarà perpendicolare a $B'C'$ e quindi a BC'. Da ciò deriva che B è il punto d'incontro di due altezze del triangolo $A'C'D'$ e che quindi BD' è perpendicolare ad AC'. Onde AC' e $A'C$ essendo perpendicolari a una stessa retta saranno parallele tra loro.

Al caso di qualunque angolo si applica invece la seguente altra dimostrazione del MOLLERUP (3), basata sulla considerazione delle due circonferenze passanti rispettivamente per le due quaterne di punti A, B, E, F e B, C, D, E che si ottengono portando nel

(1) Perciò essa è nota ai geometri italiani col nome di *Teorema di* PAPPO.

(2) « Mathematische Annalen », Bd. 57.

(3) « Mathematische Annalen », 1903.

Digitized by Google

modo indicato dalla figura sui lati d'un angolo qualunque a partire dal vertice, i segmenti che figurano nelle due proporzioni

$$a : b = e : f$$

$$b : c = d : e.$$

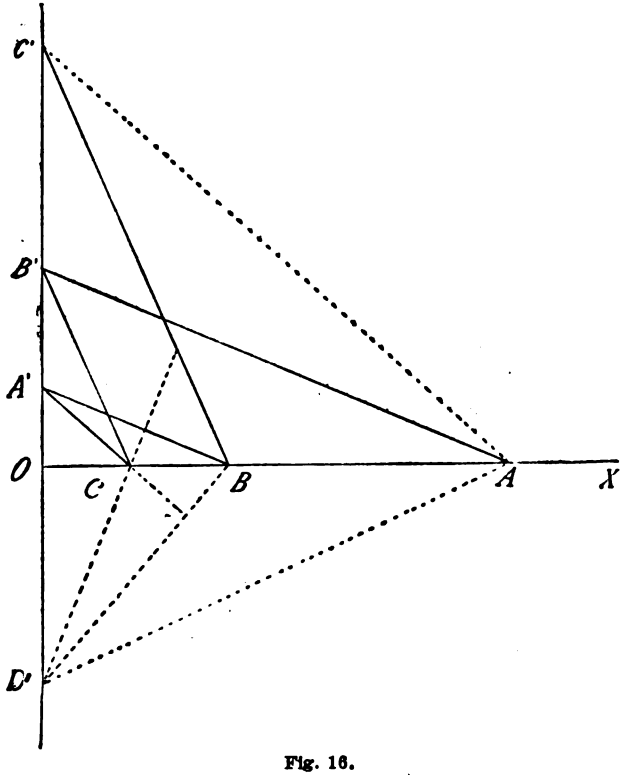


Fig. 16.

Sia XOY un angolo qualunque (fig. 17) e si portino su OX, OY rispettivamente, a partire da O i due segmenti a, b in OA, OB, e sui loro prolungamenti, sempre a partire da O, i due segmenti f, e in OF, OE. I punti A, B, F, E saranno su una stessa circonferenza. Con centro ora in O e raggio c si descriva un'altra circonferenza. Sia C uno dei punti in cui le dette due circonferenze si tagliano. (Che le due circonferenze s'intersechino si può sempre ottenere scegliendo opportunamente quella delle due proporzioni date che si adopera per costruire la prima di esse).

Se indichiamo con D il punto in cui la retta OC incontra la

Digitized by Google

prima circonferenza descritta si avrà, in virtù della seconda delle proporzioni date:

$$d = OD.$$

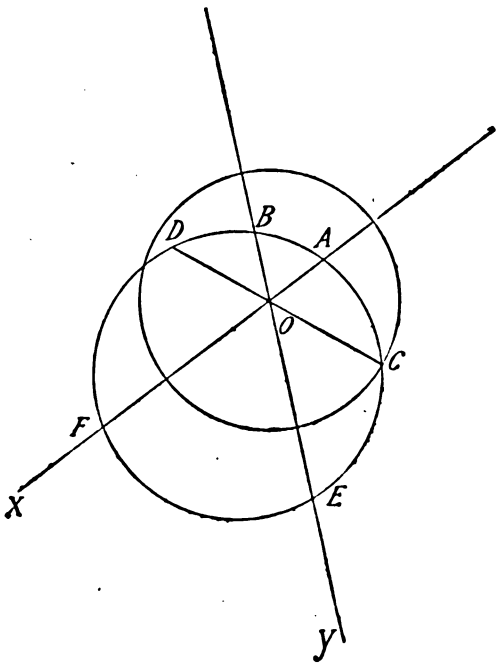


Fig. 17.

E poichè i punti A, D, F, C sono su una stessa circonferenza si avrà:

$$a : c = d : f,$$

come si voleva dimostrare.

§ 19. **Semplificazioni relative al teorema dell'invertibilità dei medi.** — Della proprietà dei segmenti proporzionali, espressa, come vedemmo, dal teorema di Pappo, quella dell'invertibilità dei medi non rappresenta che un caso particolare.

Applicando infatti il primo alle due proporzioni:

$$a : b = c : d$$

$$b : c = b : c$$

se ne deduce l'altra

$$a : c = b : d.$$

Digitized by Google

La speciale importanza tuttavia di questo caso particolare, il quale basta già per sè a permettere lo sviluppo delle parti della teoria delle proporzioni alle quali è necessario ricorrere nelle trattazioni geometriche elementari, rende interessante notare il fatto, rilevato da B. Levi (1) che esso può essere dimostrato direttamente. Ciò si ottiene ricorrendo al confronto delle due figure (fig. 18) che nascono disponendo i triangoli simili cui dànno luogo le due proporzioni

$$a : b = c : d$$

$$a : c = b : d$$

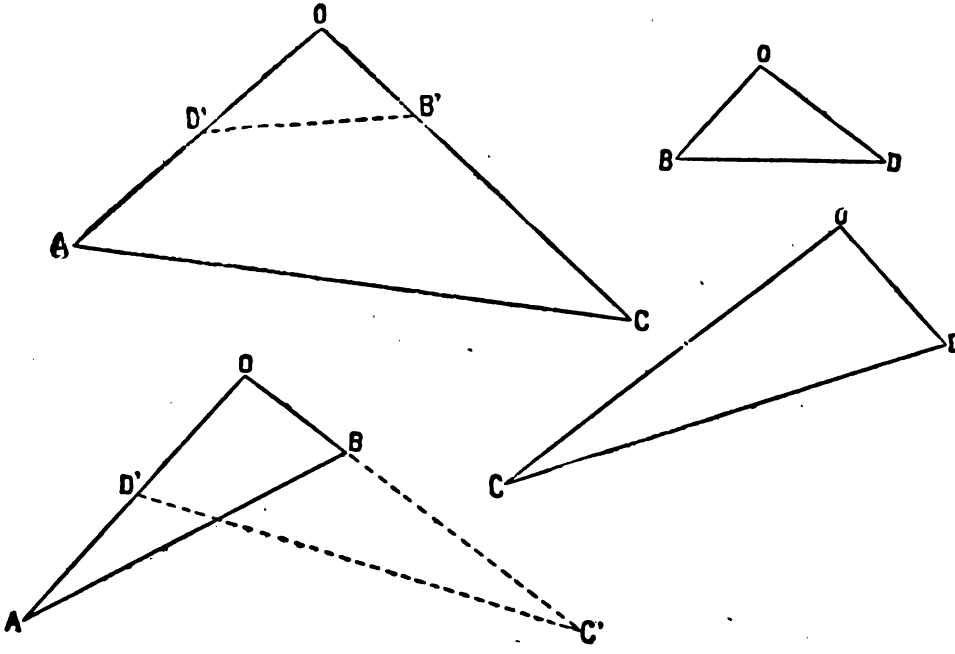


Fig. 18.

in modo da avere comune l'angolo che comprende i segmenti in questione e da avere i rimanenti vertici su una stessa circonferenza.

È evidente infatti che la figura che si ottiene sovrapponendo in tal modo i due triangoli *OAC*, *OBD* è la stessa di quella che si otterrebbe sovrapponendo invece i due triangoli *OAB*, *OCD*, di-

(1) Supplemento al « Periodico di Matematica », a. VI, fasc. VIII (1903).

Digitized by Google

modochè se l'angolo compreso tra i lati a, c e b, d nei primi due triangoli è uguale a quello compreso tra i lati a, b e c, d negli altri due anche questi due ultimi dovranno esser simili tra loro.

Con ciò il teorema dell'invertibilità dei medi non risulta ancora stabilito, in corrispondenza alla definizione di segmenti proporzionali come lati omologhi di triangoli simili comprendenti un *angolo qualunque*.

Occorre per ciò dimostrare che se due coppie di segmenti sono lati omologhi in due triangoli simili particolari (per es. cateti omologhi di triangoli simili *rettangoli*), i triangoli costruiti con quei segmenti e con un angolo qualunque α risultano pure simili.

A tal fine basterà far vedere che: « se la relazione accennata fra i quattro segmenti sussiste per un certo angolo α, essa sussiste per l'angolo retto »; attesochè il verificarsi della relazione stessa per l'angolo retto rende determinato il quarto segmento dati i primi tre, e quindi dalla proprietà sopra espressa si deduce la reciproca.

Lo scopo indicato innanzi era già implicitamente raggiunto dall' HILBERT (1), con un'elegante dimostrazione basata sulla considerazione delle tre coppie di triangoli (aventi per base rispettivamente i lati di triangoli dati e per altezza i raggi dei loro cerchi inscritti) determinati dalle bisettrici dei triangoli simili in questione.

Lo sviluppo del procedimento sopra accennato di HILBERT, si appoggia a tre lemmi, i quali sono stati ripresi dal LEVI, che tuttavia conduce a termine la cosa in un modo più semplice.

Questi tre lemmi sono i seguenti:

1° LEMMA. — Se a, a', b, b' sono cateti omologhi di triangoli rettangoli simili, allora anche i triangoli rettangoli aventi per cateti omologhi rispettivamente i segmenti $a + a'$, a e $b + b'$, b sono simili.

Collocati infatti i due triangoli rettangoli (fig. 19) aventi per cateti a, b, a', b' in modo da avere comune in O l'angolo retto e le due ipotenuse AB, $A'B'$ parallele si porti a partire da A su OA un segmento $AE = a'$ sarà $OE = a + a'$. Si conduca per E la parallela ad AB che incontri in F il lato OB e si conduca per A la parallela ad OF che incontri la EF in F'. I triangoli AEF', $OB'A'$ sono uguali dal che segue che $AF' = OB'$.

(1) *Grundlage der Geometrie*, II Aufl., pag. 36.

Digitized by Google

Ma nel parallelogrammo $ABFF'$ $AF' = BF$ dunque $BF = OB'$ e quindi $OF = b + b'$.

Dal che risulta b, $b + b'$ e a, $a + a'$ sono cateti omologhi di triangoli rettangoli simili.

2° Lemma. — Se a, a' e c, c' sono cateti omologhi di triangoli simili e b, b', c, c' pure, lo saranno anche i segmenti: $a + b$, $a' + b'$ e c, c' (fig. 20).

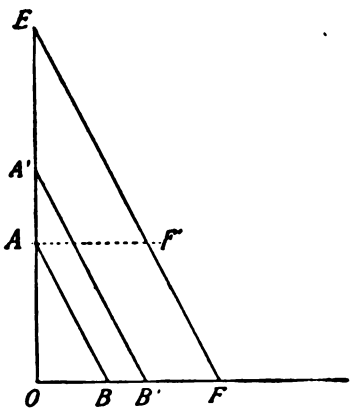


Fig. 19.

Si deduce dal 1° lemma.

Infatti se a, a' e c, c' lo sono, lo saranno anche a, c e a', c' per quanto è stato dimostrato in dietro e parimente, per la stessa ragione: b, c e b', c', dal che si conchiude che lo sono pure: a, b, a', b'. Ma, per la proporzione precedentemente dimostrata, da ciò deriva che lo sono pure i segmenti: $a + b$, a e $a' + b'$, a'.

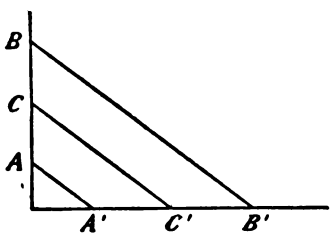


Fig. 20.

Dal che, pel fatto che, come già si vide lo sono i segmenti: c, a e c' a', si deduce in fine che lo saranno pure: $a + b$, a e $a' + b'$, a' come si voleva dimostrare.

3° Lemma (conseguenza immediata del 2°). — In due triangoli simili due lati omologhi e le due corrispondenti altezze, sono segmenti atti a figurare come lati omologhi di triangoli simili.

Se ora considereremo, col Levi, i segmenti OA, OB, OC, OD (fig. 21) determinati da due rette parallele sui due lati d'un angolo qualunque e se in essi si conducano rispettivamente le altezze AE, CF corrispondenti ai lati OB, OD si avrà pel teorema precedente che i segmenti: OB, OD, AE, CF saranno cateti omologhi di triangoli rettangoli simili.

Se ora sul lato sul quale si trovano i punti B, D (fig. 21) si portano, a partire da O due segmenti OA' OC' eguali rispettivamente ad OA, OC, si potrà dire lo stesso anche delle basi e delle

Digitized by Google

altezze dei triangoli isosceli OAA', OCC', cioè dei segmenti OA', OC' e AE, CF.

Dal che deriva, pel teorema già più volte applicato, che anche OA, OB, OC, OD saranno cateti omologhi di triangoli rettangoli simili come si voleva provare.

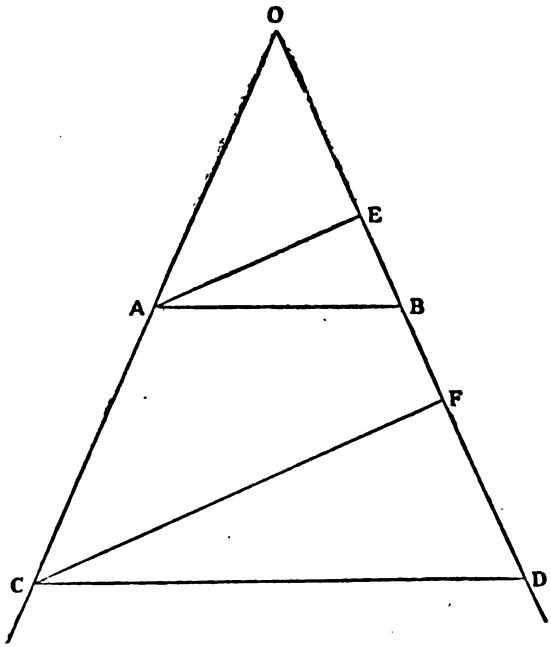


Fig. 21.

§ 20. **Uso di considerazioni stereometriche.** — Abbiamo veduto che le proprietà fondamentali delle proporzioni tra segmenti (definite mediante il parallelismo), si rispecchiano in certi teoremi di configurazione nel modo seguente:

1) la transitività dell'eguaglianza di rapporti e il teorema della ragione composta corrispondono al postulato delle parallele (transitività del parallelismo) e al teorema di Desargues (triangoli omotetici):

2) il teorema della ragione perturbata (che ha come caso particolare l'invertibilità dei medi) corrisponde al teorema di Pappo (esagono iscritto in una coppia di rette).

Le dimostrazioni di questi teoremi possono essere, sotto certi aspetti, semplificate coll'uso di considerazioni stereometriche.

Digitized by Google

Il massimo vantaggio si ha in particolare pel teorema di DESARGUES ; per es. due triangoli omotetici si possono riguardare come sezioni piane di due triedri colle facce parallele, ed allora il loro centro d'omotetia risulta segato sul piano dalla congiungente i vertici dei due triedri.

Del teorema di PAPPO si può fornire una dimostrazione mediante le proprietà dei due sistemi di generatrici d'un iperboloide (DANDELIN) che in particolare può scegliersi rotondo (1).

Un esempio caratteristico del partito che si può trarre dalle costruzioni nello spazio e in particolare del teorema di DESARGUES per la dimostrazione di teoremi che nelle ordinarie trattazioni sono fatti dipendere dalla teoria delle proporzioni, ci è fornita dalla risoluzione data dal DE PAOLIS del problema relativo alla costruzione del decagono regolare.

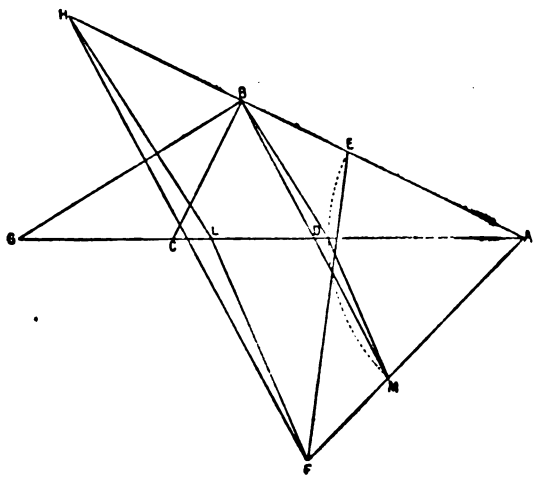


Fig. 22.

Costruito un triangolo rettangolo ABC di cui il cateto AB sia doppio del cateto BC (fig. 22) e preso su CA il segmento CD eguale a CB e da AB il segmento AE uguale ad AD, si tratta di dimostrare che nel triangolo isoscele AFE costruito su AE come base ed aventi i lati AF, EF uguali ad AB l'angolo EFA è uguale alla quinta parte di due retti.

Per ciò preso sul prolungamento di DC il segmento CG eguale a CD e quindi a CB sarà $\widehat{GBD}$ un angolo retto. Dal che risulta

$$\widehat{GBC} = \widehat{DBA}$$

onde :

$$\widehat{CGB} = \widehat{DBA}.$$

(1) SCHUR, « Mathematische Annalen », Bd. 51, 1899. Facendo uso di considerazioni d'equivalenza, la transitività dell'eguaglianza di rapporti può farsi risultare dal fatto confronto di due parallelepipedi rettangoli costruiti convenientemente coi segmenti dati.

Digitized by Google

Costruito allora entro l'angolo BAC il triangolo ALH eguale ad ABG si avrà:

$$H\widehat{LA} = \widehat{ADB}$$

onde le rette LH, DB saranno parallele.

Preso $AM = AE$ i triangoli isosceli MDA, FLA aventi l'angolo al vertice comune avranno gli angoli alla base uguali onde anche le rette MD, FL saranno parallele.

Allora pel teorema dei triangoli omotetici applicato a MBD, FHL saranno paralleli anche i lati MB, FH.

Si considerino ora i triangoli isosceli AEF, AFH aventi gli angoli al vertice uguali ambedue ad $\widehat{ABM}$ (come risulta dall'eguaglianza di ABM, AFE e dal parallelismo di MB, FH). Essendo isoscele anche il triangolo FHE sulla base FH (poichè si ha, da una parte $AG = AH$, $AD = AE$, $DG = EH$ e dall'altra $DG = 2BC = AB$, $EH = AB = EF$) risulta che $\widehat{AHF}$ è uguale alla metà di $\widehat{AFH}$ e che quindi nel triangolo isoscele AEF l'angolo $E\widehat{FA}$ essendo la metà di quelli alla base, è uguale alla quinta parte di due retti come si voleva provare.

Digitized by Google

Digitized by Google

ARTICOLO QUINTO

Sulle applicazioni del postulato della continuità nella Geometria elementare, di Giuseppe Vitali a Modena.

§ 1. **Introduzione.** — La teoria euclidea delle proporzioni, analizzata nell'articolo precedente, c'insegna a trattare i rapporti di grandezze omogenee in qualche modo come numeri; e se il concetto greco del « numero » rimane tuttavia limitato ai numeri interi e frazionari, con esclusione di quelli che oggi chiamiamo « numeri irrazionali », la differenza di tale veduta rispetto alla nostra può ridursi, per molti aspetti, ad una semplice questione di linguaggio. Ma insieme colla questione di linguaggio appare nella scienza moderna una maniera affatto nuova di considerare le *questioni d'esistenza.*

La Geometria greca non possiede alcun criterio generale in ordine a questioni di tal natura. Per esempio non offre una risposta generale alla domanda circa l'esistenza di una grandezza x che debba essere quarta proporzionale dopo tre grandezze date, a, b, c, soddisfacendo così alla condizione

$$a : b = c : x ;$$

Euclide si limita a dimostrare questa esistenza nel caso dei segmenti rettilinei, per mezzo della nota costruzione fornita dalle parallele.

A maggior ragione la Geometria greca non risolve (o fa dipendere da speciali postulati costruttivi) i problemi in cui si tratti dell'esistenza di rapporti soddisfacenti a date condizioni, p. es. se esista un segmento x che in confronto ad altri segmenti dati a, b, c, soddisfi alla condizione

$$c^3 : x^3 = a : b .$$

Digitized by Google

In questi casi, ed in altri somiglianti, si potrebbero bensì trovare dei valori vicini quanto si vuole di x, per cui il rapporto $c : x$ riesca maggiore o minore di quello che soddisfarebbe alla condizione proposta, ma da questa *soluzione approssimata* del problema nulla si trae *a priori* circa l'esistenza matematica della *soluzione esatta*; infatti i geometri greci si fanno uno scrupolo di giungere a una siffatta inferenza, che oltrepassa il campo in cui hanno acquistato chiara consapevolezza dei processi dell'analisi infinitesimale. All'opposto i matematici moderni, essendo proceduti molto più innanzi nell'uso di tali processi, sono stati condotti a formulare, come principî generali, quei dati dell'intuizione che ne costituiscono il presupposto, rigorosamente valutato.

Il primo e fondamentale principio, che s'incontra in quest'ordine d'idee, è il *postulato della continuità della retta*, di cui vogliamo esaminare il contenuto e l'uso che già occorre di farne, per giustificare talune semplici ammissioni, nella Geometria elementare.

§ 2. **Il postulato della continuità della retta.** — Le proprietà che si riattaccano ai nostri concetti intuitivi di retta, piano, segmento, angolo, congruenza, formulate nei postulati degli Art. Secondo e Terzo, non fanno appello all'idea che ci formiamo della *continuità* della retta. Invero esse non contengono alcun presupposto che valga a giustificare una delle seguenti affermazioni, che l'intuizione ci suggerisce:

1° Se in un segmento di retta due punti si muovono descrivendo il segmento in senso opposto, essi si incontrano in un punto.

2° Se due punti mobili descrivono, nello stesso senso, un segmento, e quello di essi che si trovava indietro passa avanti all'altro, vi è pure un incontro e, se più, un primo punto d'incontro dei due mobili.

Cerchiamo di tradurre queste affermazioni, e in ispecie la prima, in un postulato che rivesta forma logicamente precisa. A tal fine facciamo la seguente considerazione.

In un segmento di retta AB un punto C determina due segmenti AC, CB. Se si pensa di considerare il punto C come appartenente ad uno solo dei due segmenti AC, CB, si ha una *divisione in parti* del segmento AB, la quale gode delle seguenti proprietà:

1ª. Ogni punto del segmento AB appartiene ad *una* delle due parti.

2ª. Il punto A appartiene ad una delle parti (che diremo

Digitized by Google

la *prima*) ed il punto B all'altra; il punto C può appartenere indifferentemente all'una o all'altra parte secondo il fissato.

3ª. Ogni punto della prima parte precede ogni punto della seconda nell'ordine AB del segmento.

Per generalità si può considerare anche il caso in cui il punto C cada in A o in B. Pensando allora il punto C, rispettivamente nei due casi, come appartenente alla prima o alla seconda parte, si ha ancora una divisione in parti che soddisfa alle proprietà enunciate, dove una delle parti è costituita dall'estremo A o B del segmento e l'altra da tutti i punti rimanenti di esso.

Ora, considerando attentamente la reciproca della precedente proposizione, si vede che essa, benchè non discenda logicamente dalle proprietà segmentarie enunciate nell'Art. Secondo, si trova in accordo coll'idea che ci formiamo della continuità della retta. In seguito a ciò noi ammetteremo il seguente *postulato*.

Se un segmento di retta AB *è diviso in due parti, in guisa che:*

1° *ogni punto del segmento* AB *appartenga ad* **una** *delle due parti;*

2° *l'estremo* A *appartenga alla prima parte e* B *alla seconda;*

3° *un punto qualunque della prima parte preceda un punto qualunque della seconda, nell'ordine* AB *del segmento:*

esiste un punto C *del segmento* AB (*che può appartenere all'una o all'altra parte*), *tale che ogni punto di* AB *che precede* C *appartiene alla prima parte, ed ogni punto di* AB *che consegue a* C *appartiene alla seconda parte della divisione stabilita.*

Se una delle parti è costituita del solo punto A o B, il punto C è il detto estremo A o B del segmento.

Osservazione. — Il postulato introdotto si può dire rispondente al primo dei fatti intuitivi sopra menzionati. Invero le due parti in cui il segmento AB è diviso si possono pensare come descritte da due diversi punti che si muovono in senso opposto andandosi incontro. Il punto d'incontro verrebbe qui ad essere contato come appartenente ad ambedue le parti, ma può immaginarsi attribuito ad una sola (e tolto dall'altra) e ciò deve farsi per conservare l'ipotesi posta sulla data divisione in parti.

Il postulato enunciato, che risponde alla maniera d'introduzione dei numeri irrazionali di R. Dedekind (1), prende il nome di *postulato della continuità* o anche di *postulato di* Dedekind.

(1) *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig, 1872, 2ª ed., 1892.

Digitized by Google

È facile vedere che esso riesce a colmare la lacuna già segnalata nella teoria euclidea dei rapporti o della misura, per riguardo alle questioni d'esistenza; poichè in base ad esso si può far corrispondere ordinatamente l'insieme dei seguenti rettilinei all'insieme dei numeri reali assoluti, razionali o irrazionali, tostochè questi siano stati convenientemente definiti (Cfr. Art. Sesto). Illustriamo in breve la cosa, ammettendo due presupposti che più avanti faremo oggetto di particolare esame:

1) la divisibilità del segmento;

2) il postulato d'Eudosso-Archimede, per cui «dati due segmenti, vi è sempre un multiplo dell'uno maggiore dell'altro».

Dunque ove siano dati due segmenti a ed u, si può cercare il rapporto o la misura del primo rispetto all'altro (preso come *unità*), guardando se una parte aliquota di u entri in a un numero intero di volte: se p. es. $\frac{u}{n}$ entra in a esattamente m volte, sarà $\frac{m}{n}$ la misura (esatta) di a, rispetto ad u; sarà invece $\frac{m}{n}$ una *misura approssimata* di a, a meno di $\frac{1}{n}$, ove la divisione di a per $\frac{u}{n}$ lasci un resto r (per definizione $r < \frac{u}{n}$).

Per procedere in maniera sistematica si può immaginare u divisa per esempio in 2, 4, 8.... parti uguali, ovvero in 10, 10^2, 10^3.... secondo l'uso del nostro sistema decimale: se esiste una parte aliquota $\frac{u}{10^n}$ che sia contenuta esattamente in a, la misura di a verrà espressa da una frazione del tipo $\frac{m}{10^n}$, la quale si scrive nel sistema decimale, con un numero finito di cifre. Ma se il rapporto $a : u$ è, per esempio, $\frac{1}{3}$, cioè un numero che non si può scrivere nel sistema decimale con un numero finito di cifre, il procedimento di divisione indicato ci darà l'espressione di $\frac{1}{3}$ sotto la forma infinita:

$$\frac{1}{3} = 0{,}333....$$

equivalente alla progressione geometrica

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ...$$

Digitized by Google

In ogni caso se il rapporto $a : u$ è esprimibile con una frazione ordinaria, $\frac{m}{n}$, questa potrà essere calcolata per la via anzidetta, come frazione generatrice, e limite, di una *frazione decimale periodica.*

La stessa conclusione si estende al caso in cui si sia divisa l'unità u in 2, 4, 8..., ovvero in p, p^2, p^3.... parti uguali (p intero > 1) purchè si parli — in luogo che del sistema decimale — del *sistema di numerazione binario* (1) o *a base* p.

Da quanto sopra è detto si rileva che il procedimento delle divisioni successive di u in p, p^2, p^3.... parti uguali, e facciamo — per semplicità di discorso —, $p = 10$, conduce in ogni caso ad un'approssimazione sistematica del rapporto $a : u$, cioè ad un' *espressione decimale limitata o illimitata,* che anche in questo secondo caso, e indipendentemente dalla sua periodicità, si può definire come un *numero* (razionale o *irrazionale*), misura di a.

Che questo decimale illimitato sia veramente determinato dal confronto dei segmenti, o delle grandezze omogenee, a ed u, resulta dal cosiddetto *postulato* d'ARCHIMEDE, per cui, essendo data una qualsiasi parte aliquota, sempre esiste un multiplo di essa maggiore di a, diguisachè vi è anche un massimo multiplo $m \frac{u}{n}$ contenuto in a:

$$m\frac{u}{n} \leq a < (m + 1) \frac{u}{n}.$$

Ora la questione inversa « *se per ogni decimale illimitato esista sempre un corrispondente segmento* a, di cui esso esprima il rapporto ad u », viene *risolta affermativamente* dal postulato di DEDEKIND. Infatti, ad un siffatto decimale — compreso fra due valori approssimati per difetto e per eccesso cui rispondono due segmenti OA e OB — si può far corrispondere una partizione di DEDEKIND del segmento AB, attribuendo:

1) alla prima parte ogni punto X per cui AX riesca minore od uguale ad un segmento misurato da un qualche valore approssimato per difetto del decimale (cioè al valore che si ottiene fermandosi ad una qualsiasi cifra n^a del decimale);

(1) Il sistema a base 2, analogo al sistema decimale, permette di scrivere tutti i numeri interi con *due* sole *cifre* 0,1. Per esempio l'ordinario numero $29 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$, si scriverà: 11101.

Digitized by Google

2) alla seconda parte ogni altro punto Y del segmento. Il punto di separazione P, appartiene in questo caso alla seconda parte e definisce un segmento OP che ha precisamente come misura il nostro decimale illimitato.

Alla medesima conclusione si arriva similmente qualunque sia il modo di misura adottato, e in particolare se si ricorra a quel procedimento naturale per la ricerca del massimo comun divisore che già trovasi in EUCLIDE e che conduce a definire i rapporti o numeri irrazionali mediante frazioni continue; similmente anche si conclude partendo dalla definizione del numero irrazionale, propria a DEDEKIND, come partizione del campo dei numeri razionali in due classi contigue (cfr. Art. Sesto).

In modo reciproco si può dire che il postulato « ad ogni numero irrazionale, corrisponde un segmento, di cui esso è misura (rispetto a una data unità) », tenuto conto del cosiddetto postulato d'ARCHIMEDE, equivale all'affermazione espressa innanzi come postulato di continuità. Perchè, ove sia data una partizione del segmento AB, soddisfacente ai requisiti 1) 2) 3) del postulato di DEDEKIND, basterà considerare i punti di divisione di AB in 2, 2^2, 2^3.... parti uguali, per costruire nel sistema binario un'espressione illimitata definitrice d' un *numero* (razionale o no), cui risponde precisamente quel punto di separazione delle due classi, di cui si vuole dimostrare l'esistenza.

§ 3. Divisibilità del segmento e delle grandezze continue. — Nel precedente paragrafo abbiamo introdotto il postulato della continuità, in una forma cui abbiamo dato nome da DEDEKIND, e ne abbiamo illustrato il contenuto per riguardo alla teoria della misura; in questo chiarimento ci siamo serviti liberamente di due presupposti, cioè della divisibilità del segmento e del postulato — che si deve ritenere introdotto nella scienza da EUDOSSO — e che porta comunemente il nome di ARCHIMEDE. Ora vogliamo riconoscere che questi due principî seguono come conseguenza dal postulato della continuità, nella forma enunciata. E anzitutto dimostriamo, in questo senso, la divisibilità del segmento, indipendentemente dall' uso delle parallele o di altre costruzioni piane: la dimostrazione si estenderà quindi alle altre classi di grandezze (caratterizzate dagli stessi postulati di uguaglianza, somma e diseguaglianza che valgono pei segmenti), purchè similmente continue, e perciò in particolare agli angoli e agli archi di cerchio, quando

Digitized by Google

avremo stabilito per essi l'estensione del postulato di continuità.

Avvertiamo anzitutto che, dato un segmento $a = AB$, ed un qualsiasi intero n (> 1), esistono sempre segmenti il cui *n-plo* sia minore, ed evidentemente anche segmenti il cui *n-plo* sia maggiore di a. Invero, preso fra A e B un punto C, uno dei due segmenti AC e BC sarà $\leq \frac{a}{2}$ cioè tale che il suo doppio sia $\leq a$; similmente si costruisce un segmento $\leq \frac{a}{4}$ e infine un segmento $\leq \frac{a}{2^p}$ sicchè basta determinare l'esponente p in guisa che sia $2^p > n$, per avere segmenti il cui *n-plo* riesca $< a$.

Ciò posto, sia AB un segmento di retta ed n un numero intero. Io dico che esiste un segmento tale che il suo *n-plo* uguagli il segmento AB. Per questo concepiamo il segmento AB ordinato da A verso B, e diviso in due parti in guisa che, essendo H un punto della prima parte si abbia $nAH < AB$, e che, essendo K un punto della seconda parte si abbia $nAK \geq AB$. È manifesto che questa divisione in parti soddisfa alle condizioni per l'applicabilità del postulato di Dedekind e quindi esiste un punto M tale che ogni punto di AM appartiene alla prima parte ed ogni punto di MB alla seconda. Io dico che $nAM = AB$.

Supponiamo che sia per esempio $nAM < AB$. In questo caso dentro il segmento AB cadrà un punto C tale che $nAM = AC$. Prendiamo dopo M un punto M' tale che $nMM' < CB$. Si avrà allora $nAM + nMM' < AC + CB$, ossia $nAM' < AB$, il che è assurdo perchè il punto M' seguendo il punto M deve essere $nAM' > AB$.

Dunque non può essere $nAM < AB$. In modo analogo si esclude che sia $nAM > AB$. Abbiamo perciò senz'altro $nAM = AB$.

Come abbiamo avvertito si dimostrerà analogamente la divisibilità in n parti uguali dell'angolo o dell'arco di cerchio; la quale non si può dimostrare indipendentemente dalla continuità, pur ammettendo tutti i postulati che stanno a base delle ordinarie costruzioni della Geometria elementare, perchè la divisione non è effettuabile cogli strumenti riga e compasso (cfr. Libro III). E dalla possibilità di dividere in n parti uguali un segmento di retta ed un angolo conseguirà anche la possibilità di dividere in n parti uguali una striscia, uno strato, un arco ed un diedro. Manifestamente però a ciascuna di queste figure si può applicare il ragionamento generale.

Digitized by Google

§ 4. **Postulato d'Archimede.** — Una seconda proposizione che si dimostra come applicazione del postulato di DEDEKIND è quella che comunemente si ammette sotto il nome di *Postulato di* ARCHIMEDE. Il suo enunciato è il seguente:

Dati due segmenti esiste sempre un multiplo dell'uno maggiore dell'altro.

Per dimostrarlo cominciamo col trasportare uno dei segmenti sulla retta dell'altro in guisa che vengano ad avere un estremo in comune e che cadano entrambi dalla stessa banda rispetto a questo estremo. Dopo ciò siano per esempio AB e AC i due segmenti ed $AB < AC$ (fig. 1). Noi dobbiamo provare che esiste un numero (intero) n per cui si ha $nAB > AC$.

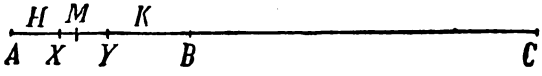


Fig. 1.

Supponiamo che ciò non sia vero; allora esistono nel segmento AC dei punti B (non coincidenti coll'estremo A) tali che scelto un intero n, comunque grande, $nAB < AC$.

Basiamoci sull'ipotesi precedente per mostrare che essa conduce all'assurdo.

I punti del segmento AC si possono pensare distribuiti in due parti: 1ª punti H per cui non esiste un numero (intero) n tale che sia $nAH > AC$; 2ª punti K per cui esistono dei numeri n (interi) pei quali è $nAK > AC$. Questa divisione in parti soddisfa alle condizioni per l'applicazione del postulato di DEDEKIND, e quindi esiste un punto M tale che i punti di AM appartengano alla prima parte e quelli di MC alla seconda. Allora, prendendo in MC un punto Y per modo che sia $MY < AM$, il punto medio X di AY cadrà in AM ed apparterrà perciò alla prima parte, mentre esistendo un numero (intero) n per cui $nAY > AC$, si ha $2nAX > AC$.

Questo assurdo dimostra la proposizione d'ARCHIMEDE. La dimostrazione esposta è dovuta a STOLTZ.

§ 5. **Di altre forme del postulato della continuità. Continuo non archimedeo.** — Facciamo a questo punto una digressione per discorrere di altre forme che possono darsi al postulato della continuità. In luogo di adottare la formulazione del § 2 si può assumere un postulato che risponde alla maniera d'introduzione dei

Digitized by Google

numeri razionali secondo G. CANTOR (cfr. Art. Sesto) e che perciò designeremo come *Postulato di* CANTOR.

Se due classi di segmenti di retta sono tali che:

1° *nessun segmento della prima classe sia maggiore di qualche segmento della seconda*;

2° *prefissato un segmento σ piccolo a piacere esistano un segmento della prima ed uno della seconda classe la cui differenza sia minore di σ*;

esiste un *segmento che non è minore di alcun segmento della prima classe nè maggiore di alcuno della seconda.*

Esso è una conseguenza del postulato di DEDEKIND. Invero supponiamo di avere due classi di segmenti di retta tali che:

1° nessun segmento della prima classe sia maggiore di qualche segmento della seconda;

2° prefissato un segmento σ piccolo a piacere esistano un segmento della prima ed uno della seconda classe la cui differenza sia minore di σ.

Noi potremo considerare un segmento AB della seconda classe e trascurare di questa seconda classe tutti i segmenti maggiori di AB. I segmenti della prima classe e di questa seconda così ridotta si potranno rappresentare con punti del segmento AB: un punto M di AB rappresentando un segmento di una di quelle classi quando quel segmento è uguale al segmento AM.

Così si hanno sul segmento AB due classi di punti le quali ci permettono di dividere il segmento stesso in due parti, attribuendo alla prima parte i punti che precedono, nell'ordine AB del segmento, qualche punto della prima classe, ed alla seconda i rimanenti. Questa divisione del segmento AB in due parti soddisfa manifestamente alle condizioni sotto le quali è applicabile il postulato di DEDEKIND e quindi possiamo dire che esiste *un* punto C (che stavolta appartiene certamente alla seconda parte) tale che ogni punto di AB che precede C appartiene alla prima parte ed ogni altro punto rimanente alla seconda.

Il segmento AC è manifestamente non minore di alcun segmento della prima classe data nè maggiore di alcuno della seconda. Ma noi possiamo aggiungere di più che esso è il solo che goda di questa proprietà, poichè se a tale condizione soddisfacesse un altro segmento AD diverso da AC, i segmenti delle due classi non ubbidirebbero alla seconda condizione; ed invero non esisterebbe un segmento della prima classe ed uno della seconda la cui differenza sia minore della differenza che passa fra AC ed AD.

Digitized by Google

Così pure il postulato di DEDEKIND consegue da quello enunciato in questo paragrafo se si ammette il postulato di ARCHIMEDE. Invero sia AB un segmento diviso in due parti come è richiesto dal postulato di DEDEKIND. Fissato un segmento σ piccolo a piacere sarà possibile trovare una parte aliquota di AB minore di σ (vedi § 4), sia dessa $\frac{AB}{n}$. Dividiamo AB in n segmenti uguali fra loro. Considerando come appartenenti a ciascuno di questi segmenti ambo gli estremi, possiamo facilmente concludere che fra essi ve ne è uno ed uno solo che contiene punti di ambo le parti in cui è diviso AB. Prendendo in tal segmento un punto dell' una ed uno dell'altra parte si vede che questi punti hanno una distanza minore di σ, onde si può concludere che prefissato un segmento σ piccolo a piacere è possibile trovare un punto della prima ed uno della seconda parte la cui distanza sia minore di σ.

Facciamo ora corrispondere a ciascun punto di AB il segmento di retta che lo unisce ad A. Otteniamo in tal modo due classi di segmenti corrispondenti ai punti delle due parti in cui è diviso AB. Queste due classi di segmenti sono tali che:

1° nessun segmento della prima classe è maggiore di qualche segmento della seconda;

2° prefissato un segmento σ piccolo a piacere esistano un segmento della prima ed uno della seconda classe la cui differenza sia minore di σ.

Quindi esiste un segmento δ che non è minore di alcun segmento della prima classe nè maggiore di alcuno della seconda. Sia M un punto di AB tale che $AM = \delta$. Ogni punto di AB che precede M appartiene alla prima parte ed ogni punto che segue M appartiene alla seconda.

Inoltre M è il solo punto che gode di questa proprietà.

Se invece si prescinde dal postulato di ARCHIMEDE, il postulato enunciato in questo paragrafo non è più equivalente a quello di DEDEKIND.

Difatti sia AB un segmento diviso in due parti in guisa che:

1° ogni punto del segmento AB appartenga ad una delle parti;

2° l'estremo A appartenga alla prima parte e B alla seconda;

3° un punto qualunque della prima preceda un punto qualunque della seconda, nell'ordine AB del segmento.

Noi possiamo a ciascun punto di AB far corrispondere il seg-

Digitized by Google

mento di retta che lo unisce con A. In tal modo otteniamo due classi di segmenti corrispondenti ai punti delle due parti in cui è diviso AB.

Queste due classi di segmenti sono tali che *nessun segmento della prima classe è maggiore di qualche segmento della seconda*, ma non si può dire che prefissato un segmento σ piccolo a piacere esistano un segmento della prima classe ed uno della seconda la cui differenza sia minore di σ; quindi non possiamo servirci del postulato enunciato in questo paragrafo per dimostrare quello di DEDEKIND.

Per mettere meglio in evidenza la differenza di valore che passa fra i due enunciati consideriamo due raggi paralleli volti nello stesso senso ed uscenti da due punti A e B la cui congiungente non ha la direzione di quei raggi (fig. 2) e più in particolare consideriamo l'insieme dei punti di questi raggi che giacciono a distanza finita.

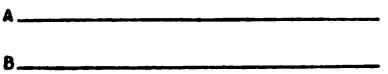


Fig. 2.

Se noi immaginiamo i punti del primo raggio ordinati nell'ordine naturale che va da A all'infinito e quelli del secondo raggio nell'ordine inverso a quello naturale e se infine supponiamo che ogni punto del primo raggio preceda ogni punto del secondo, possiamo concepire l'insieme di questi punti come un segmento ordinato che va da A a B. Per tale segmento vale manifestamente in tutti i casi il postulato della continuità nella seconda forma. Non varrebbe invece sempre il postulato introdotto nel § 2 e precisamente per la divisione di AB in due parti tali che alla prima parte appartengano tutti e soli i punti del primo raggio. Invero per questa divisione non esiste il punto che separa le due parti. Anzi se di più si ammette, come abbiamo fatto tacitamente al § 4, che i punti di un segmento di retta siano tutti a distanza finita, si vede che l'esempio di segmento corrispondente alla precedente figura non è ancora impossibile anche ammesso il secondo postulato della continuità, ma la sua incompatibilità col 1° postulato diventerebbe estrema, inquantochè non sarebbe possibile toglierla coll'aggiunta di un punto che separi i due raggi.

In ciò che precede abbiamo osservato che il postulato di DEDEKIND equivale alla somma del postulato di CANTOR e di quello di ARCHIMEDE. Ora, modificando lievemente l'esempio dato innanzi, possiamo costruire con VERONESE un continuo non-archimedeo per cui sono soddisfatti gli ordinari postulati dell'ordine e della congruenza.

Digitized by Google

A tale scopo consideriamo un sistema di infinite rette parallele succedentisi ad intervalli costanti, come nella fig. 3. Possiamo ordinare i punti di queste rette, riguardate come formanti un unico insieme, per modo che ogni punto B che cada a destra di un punto A sopra una medesima retta si possa considerare come conseguente ad A e che ogni punto C il quale sia più alto di A debba pure considerarsi come conseguente ad esso. Allora il nostro sistema di rette ci porge un insieme ordinato come l'insieme dei punti di una linea aperta, e di più si può definire in esso la congruenza di segmenti (finiti o infiniti) in base alla circostanza che il sistema può essere sovrapposto a se stesso, con una traslazione del piano, portando un punto in un altro qualsiasi.

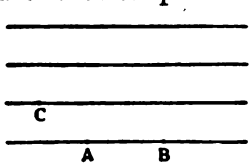


Fig. 3.

Il sistema costruito costituisce un continuo non-archimedeo soddisfacente insieme ai postulati di ordine, di congruenza e al postulato di CANTOR.

Modificando convenientemente le convenzioni precedenti, anche il fascio continuo di tutte le rette di un piano parallele ad una medesima è suscettibile di esser considerato come un continuo non-archimedeo e per esso vale inoltre il postulato della divisibilità (*ogni segmento è divisibile in* n *parti uguali qualunque* o *l'intero* n).

Si può anche dimostrare l'indipendenza del postulato di ARCHIMEDE dall'insieme dei postulati di ordine, congruenza ed appartenenza, costruendo invece che una Geometria non-archimedea ad una dimensione, una Geometria non-archimedea del piano e dello spazio. Questa costruzione messa in luce da VERONESE è stata ripresa più recentemente secondo un altro punto di vista da HILBERT, i cui magnifici sviluppi hanno rinnovato le ricerche critiche intorno ai principî della Geometria.

Ma noi non ci inoltreremo in questo campo, e ripigliando ormai il postulato della continuità nella forma di DEDEKIND, ci proponiamo di svolgerne altre conseguenze nel campo della Geometria elementare.

§ 6. **Continuità dell'angolo e del piano.** — Il postulato della continuità, ammesso per i segmenti rettilinei, si estende subito agli angoli, e quindi anche agli archi di cerchio.

Digitized by Google

Si sa che un angolo si può pensare descritto da un raggio uscente dal suo vertice o come l'insieme dei raggi che rappresentano le diverse posizioni del raggio mobile che lo descrive.

Se noi consideriamo un angolo convesso limitato dai raggi a e b, e conduciamo la retta che congiunge un punto A del raggio a con un punto B del raggio b, vediamo che i punti del segmento finito AB di questa retta vengono a corrispondere biunivocamente ai raggi dell'angolo, quando si consideri come corrispondente di un raggio dell'angolo il punto in cui questo raggio incontra il segmento AB. Ed è da notarsi che, supposto l'angolo ab generato da un raggio mobile partito da a e corrispondentemente il segmento AB generato da un punto mobile partito da A, i punti del segmento AB si susseguono nello stesso ordine che i raggi corrispondenti dell'angolo ab (cfr. Art. Secondo).

Ond'è che se si pensa l'angolo ab diviso in due parti, in guisa che:

1° ogni raggio dell'angolo ab appartenga ad una delle due parti;

2° l'estremo a appartenga alla prima parte e b alla seconda;

3° un raggio qualunque della prima parte preceda un raggio qualunque della seconda;

i punti corrispondenti del segmento AB si trovano anch'essi divisi in due parti tali che:

1° ogni punto del segmento AB appartiene ad una delle due parti;

2° l'estremo A appartiene alla prima parte e B alla seconda;

3° un punto qualunque della prima parte precede un punto qualunque della seconda.

Ma allora esiste un punto C del segmento AB (che può appartenere all'una o all'altra delle due parti) tale che ogni punto di AB che precede C appartiene alla prima parte ed ogni punto di AB che consegue C appartiene alla seconda parte nella divisione stabilita. Il raggio c corrispondente a C ha, rispetto alla supposta divisione in parti dell'angolo ab, la proprietà che ogni raggio dell'angolo ab che precede c appartiene alla prima parte ed ogni raggio di ab che consegue c appartiene alla seconda. Il raggio c apparterrà poi, a seconda dei casi, all'una o all'altra parte.

La proprietà ora dimostrata per un angolo ab convesso, vale

Digitized by Google

manifestamente anche per gli angoli piatti e concavi. Intanto un angolo piatto o concavo si può sempre pensare come l'insieme di due angoli convessi adiacenti.

Ora se ad, db sono due tali angoli convessi, e quindi ab è l'angolo completo che noi supponiamo diviso in parti, in guisa che:

1° ogni raggio dell'angolo ab appartenga ad una delle due parti;

2° l'estremo a appartenga alla prima parte e b alla seconda;

3° un raggio qualunque della prima parte preceda un raggio qualunque della seconda; si presentano tre ipotesi:

1ª Il raggio d è tale che tutti i raggi che lo precedono appartengono alla prima parte e quelli che lo seguono appartengono alla seconda.

2ª Il raggio d è seguìto da qualche raggio della prima parte. In questo caso l'angolo db si trova diviso in parti colle stesse leggi con cui è diviso in parti l'angolo ab. Ma l'angolo db è convesso e quindi esiste un raggio c dell'angolo db (che può appartenere all'una o all'altra delle due parti) tale che ogni raggio di db che precede c appartiene alla prima parte ed ogni raggio di db che segue c appartiene alla seconda, il quale raggio c, poichè nella divisione dell'angolo ab in parti i raggi dell'angolo ad appartengono tutti alla prima parte, è tale che ogni raggio di ab che precede c appartiene alla prima parte ed ogni raggio di ab che segue c appartiene alla seconda nella divisione stabilita dell'angolo ab.

3ª Il raggio d è preceduto da qualche raggio della seconda parte. In questo caso, con osservazioni analoghe a quelle fatte nel caso precedente (scambiando l'angolo db con l'angolo ad) si arriva ancora alla conclusione che esiste un raggio c dell'angolo ab (che può appartenere all'una o all'altra delle parti in cui è diviso l'angolo ab) tale che ogni raggio di ab che precede c appartiene alla prima parte ed ogni raggio di ab che consegue c appartiene alla seconda parte.

Una proposizione analoga al postulato introdotto si ha anche per gli archi di cerchio.

Consideriamo infatti su di un cerchio di centro O un arco i cui estremi siano A e B. I punti di quest'arco si possono far corrispondere biunivocamente ai raggi uscenti da O e che passano per essi. Questi raggi riempiono un angolo limitato dai raggi uscenti da O e passanti per A e per B, i quali indicheremo con a e b. E qui

Digitized by Google

pure è da notarsi che, supposto l'angolo ab generato da un raggio mobile partito da a e corrispondentemente l'arco AB generato da un punto mobile partito da A, i raggi dell'angolo ab si susseguono nello stesso ordine che i punti dell'arco AB.

Ond' è che se si pensa l'arco AB diviso in due parti in guisa che:

1° ogni punto dell'arco AB appartenga ad una delle due parti;

2° l'estremo A appartenga alla prima parte e B alla seconda;

3° un punto qualunque della prima parte preceda un punto qualunque della seconda;

i raggi corrispondenti dell'angolo ab si trovano anch'essi divisi in due parti tali che:

1° ogni raggio dell'angolo ab appartiene ad una delle due parti;

2° l'estremo a appartiene alla prima parte e b alla seconda;

3° un raggio qualunque della prima parte precede un raggio qualunque della seconda.

Ma allora esiste un raggio c dell'angolo ab (che può appartenere all'una o all'altra parte) tale che ogni raggio di ab che precede c appartiene alla prima parte ed ogni raggio di ab che segue c appartiene alla seconda parte. Il punto C in cui il raggio c incontra l'arco AB ha, rispetto alla supposta divisione in parti dell'arco AB, la proprietà che ogni punto dell'arco AB che precede C appartiene alla prima parte ed ogni punto dell'arco AB che consegue C appartiene alla seconda. Il punto C apparterrà poi, a seconda dei casi, all'una o all'altra parte.

Ragionamenti del tutto simili a quelli che precedono condurrebbero a proposizioni analoghe per gli angoli diedri, per le strisce di piano comprese fra due rette parallele e per gli strati di spazio compresi fra due piani paralleli.

Senza indugiarci su tali ovvie estensioni, rileviamo piuttosto che «la continuità dell'angolo, aggiunta a quella della retta, significa la *continuità del piano*» (e similmente la continuità del diedro porta poi la continuità dello spazio). Ciò resulta chiaro se si determini, in accordo colla nostra intuizione, il concetto della continuità del piano, per esempio mediante l'introduzione delle coordinate.

Ora alla continuità del piano si lega, nella nostra intuizione, specialmente la proprietà che «curve chiuse (continue) dividono

Digitized by Google

il piano in due parti, per modo che una linea congiungente un punto interno ed un punto esterno debba segare la curva ». Conviene vedere come questa proprietà si dimostri, per quanto concerne le curve più semplici che la Geometria elementare ha occasione di considerare.

§ 7. **Intersezioni di una retta con un circolo.** — Un altro fatto che si dimostra pure coll'applicare il postulato di DEDEKIND è il seguente:

Se una retta ha un punto interno ed uno esterno ad un cerchio, essa ha due punti comuni col cerchio (1).

Prima di svolgere la dimostrazione, notiamo come in base ai postulati della congruenza (Art. Terzo) si possano ritenere note le proprietà relative alle perpendicolari e alle oblique, conseguenze del teorema « se un triangolo ha un angolo retto o ottuso, il lato opposto ad esso è maggiore di ciascuno degli altri due », ed inoltre la proprietà per cui « in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due », e ciò indipendentemente dal postulato delle parallele.

Ora, consideriamo un cerchio C di centro O ed una retta r che abbia il punto A *interno* ed il punto B *esterno* al cerchio e che può supporsi non passante per O. Per definizione, se R è il raggio del cerchio, si ha:

$$OA < R, \; OB > R.$$

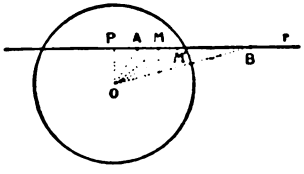


Fig. 4.

Conduciamo da O sulla retta r la perpendicolare OP (fig. 4). Siccome in un triangolo rettangolo un cateto è sempre minore dell'ipotenusa si avrà (se P è diverso da A)

$$OP < OA,$$

e quindi in ogni caso

$$OP < R,$$

ossia P è interno al cerchio.

(1) Questa proposizione compare implicitamente come un postulato negli *Elementi* di EUCLIDE. D'altronde essa non può dedursi dai postulati relativi alla congruenza, i quali corrispondono alle costruzioni effettuabili col *trasportatore di segmenti*, e quindi permettono di stabilire soltanto un caso particolare di essa, cioè il caso in cui la retta passi per il centro del circolo (cfr. Libro III).

Digitized by Google

Fissiamo la nostra attenzione sul segmento finito PB. Esso può essere diviso in due parti, ponendo nella prima i punti H pei quali è $OH < R$ (punti interni a C), nella seconda i punti K pei quali $OK \geq R$ (punti esterni a C o su C).

Ora, ricordando che di due oblique, condotte da un medesimo punto ad una retta, è maggiore quella che ha proiezione maggiore, possiamo affermare che tutti i punti del segmento PB che precedono un punto interno a C sono interni a C e quelli che seguono un punto posto su C, o esterno a C, sono esterni a C. Ma allora, pel postulato della continuità, esiste sul segmento PB un punto M tale che tutti i punti che lo precedono appartengono alla prima parte e quelli che lo seguono alla seconda.

Dico che il punto M è comune alla retta r ed al cerchio C, ossia che

$$OM = R.$$

Supponiamo per esempio che sia $OM < R$. Esisterà un segmento σ minore della differenza fra R e OM. Consideriamo il punto M' susseguente ad M, pel quale

$$MM' = \sigma.$$

È certo

$$OM' < OM + MM'$$

poichè un lato di un triangolo è minore della somma degli altri due; ma

$$OM + MM' = OM + \sigma < R,$$

dunque

$$OM' < R,$$

il che è assurdo. In modo analogo si cadrebbe in assurdo supponendo che sia

$$OM > R.$$

Bisogna dunque concludere, come si voleva, che

$$OM = R.$$

Dimostrato così che sul segmento finito PB c'è un punto M comune alla retta r ed al cerchio C, si vede subito che c'è un altro punto che gode di questa proprietà, ed è il simmetrico di M rispetto a P, sicchè possiamo concludere che un cerchio ed una retta che passi per un suo punto interno (e per uno esterno) hanno due punti in comune.

Digitized by Google

§ 8. **Intersezioni di due circoli.** — Una questione analoga alla precedente si presenta per le intersezioni di due cerchi. Si ha che:

Se in un dato piano, un cerchio C *ha un punto* X *interno ed un punto* Y *esterno ad un altro cerchio* C', *i due cerchi si tagliano in due punti.*

Dimostrazione. — Siano O ed O' i centri dei due cerchi ed R e R' i loro raggi. La retta OO' incontra il cerchio C in due punti A e B. Manifestamente uno di questi punti è interno a C' e l'altro esterno. Invero essi si trovano sulla retta OO' da banda opposta rispetto ad O. Sia A quello che si trova dalla parte di O'. Il segmento AO' sarà uguale alla differenza dei due segmenti OO' ed R ed invece sarà $BO' = OO' + R$. Dal triangolo $OO'X$ (figg. 5 e 6) si ricava che $O'X$ è maggiore della differenza che passa

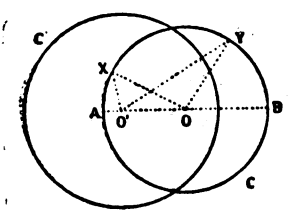


Fig. 5.

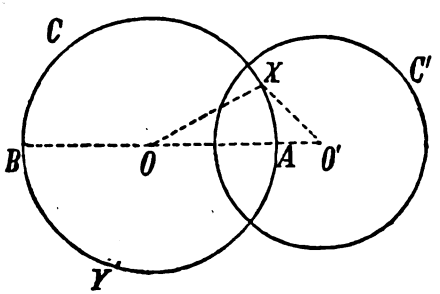


Fig. 6.

fra OO' ed R e quindi è maggiore di OA. Ma $O'X$ è minore di R', quindi $O'A$ è minore di R' ed A è interno a C'. Invece dal triangolo $OO'Y$ (fig. 5) si ha $O'Y < OO' + OY$, ossia $O'Y < OO' + R$

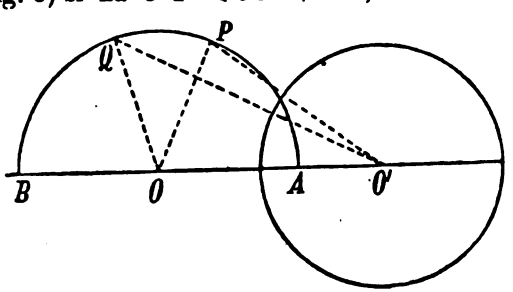


Fig. 7.

e quindi $O'Y < O'B$. Ma $O'Y > R'$ dunque $O'B > R$ e B è esterno a C'. Il cerchio C viene diviso dai punti A e B in due semicerchi (fig. 7). Consideriamone uno qualunque e immaginiamolo (per fissarne un senso) descritto da un punto che si muova da A verso B.

Digitized by Google

Prendiamo poi su di esso due punti distinti P e Q e supponiamo (per fissare le idee) che P preceda Q. Confrontando i due triangoli $OO'P$, $OO'Q$ vediamo che essi hanno a comune il lato OO', che

$$OP = OQ$$

e che infine

$$\widehat{POO'} < \widehat{QOO'}.$$

Ma sappiamo che se due triangoli hanno due lati uguali e l'angolo compreso disuguale essi hanno il terzo lato disuguale e precisamente minore quello che si oppone ad angolo minore, dunque possiamo concludere che

$$O'P < O'Q.$$

Ma allora, concepito il suddetto semicerchio diviso in due parti, in guisa che i punti della prima parte siano interni a C' e quelli della seconda esterni o su C', si vede che sono soddisfatte le condizioni per l'applicabilità del postulato di DEDEKIND e quindi che esiste un punto M che separa le due parti. Io dico che $O'M = R'$. Supponiamo infatti che sia invece per esempio $O'M < R'$. Allora, indicata con σ la differenza fra R' ed $O'M$, prendiamo sul semicerchio un punto M' che sussegua ad M e tale che la corda MM' non superi σ (1). Dal triangolo $O'MM'$ si avrebbe

$$O'M' < O'M + MM' < O'M + \sigma$$

e quindi

$$O'M' < R'.$$

Ma allora un punto M' dell'arco MB sarebbe interno a C', il che è assurdo. Si capisce che con un simile ragionamento si prove-

(1) Per trovare un tal punto si procederà come segue (fig. 8): 1° Conduciamo per M una retta diversa da OM e prendiamo su di essa un segmento MP uguale alla metà di σ. 2° Congiungiamo O con P e costruiamo un altro raggio OQ in guisa che l'angolo $\widehat{POQ}$ risulti uguale all'angolo $\widehat{MOP}$.

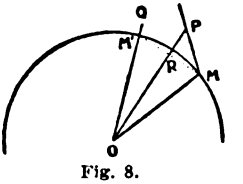


Fig. 8.

Il punto M', intersezione del semicerchio col raggio OQ, è tale appunto che $MM' \leq \sigma$.

Infatti la retta MM' incontra ortogonalmente il raggio CP in un punto R, e dal triangolo rettangolo MRP risulta $MR \leq MP$ (il segno d'uguaglianza vale soltanto se R coincide con P) ossia $MR \leq \frac{\sigma}{2}$. Ma MR è la metà di MM' dunque $MM' \leq \sigma$.

Digitized by Google

rebbe che non può essere $O'M > R'$. Si deve dunque concludere che $O'M = R'$. Resta così provato che ognuno dei due semicerchi in cui abbiamo diviso il cerchio C incontra in un punto il cerchio C e che quindi i due cerchi C e C' hanno due punti a comune c. v. d.

Osservazione. — Un altro modo di dimostrare la medesima proposizione si avrebbe riconducendo la determinazione delle intersezioni di due cerchi a quella delle intersezioni di uno dei cerchi colla retta, asse radicale dei due.

§ 9. **Il teorema di Jordan sulla divisione del piano mediante linee chiuse.** — I teoremi sulle intersezioni di rette e cerchi, stabiliti nei precedenti paragrafi, si possono estendere contemplando nella più grande generalità linee piane chiuse? In qual senso e fino a che punto è lecito affermare che una linea chiusa divide il piano in due parti?

È chiaro che il senso e il valore di una siffatta affermazione dipende dalla definizione che si dà della linea, in guisa da aderire alla nozione intuitiva che ce ne formiamo. E anzitutto conviene riferirsi a *linee continue.*

In una prima veduta si potrebbe essere indotti a definire come « linea continua » il luogo dei punti rappresentato dalle equazioni parametriche:

$$x = x(t), \qquad y = y(t),$$

dove $x(t)$ e $y(t)$ designano funzioni continue di t entro un certo intervallo $(t_1 t_2)$, e dir « chiusa » la linea i cui estremi

$$[x(t_1), y(t_1)] \text{ e } [x(t_2), y(t_2)]$$

coincidono.

Ma il concetto così definito non risponde a quello della linea intuitiva. Infatti Peano ha dimostrato che *in questo senso possono aversi linee continue che riempiono tutto un quadrato.* Tuttavia nell'esempio di Peano accade che, mentre ad ogni valore del parametro t corrisponde un determinato punto (xy), reciprocamente ad ogni punto (xy) della linea corrispondono *più* valori di t; in altre parole la linea di Peano possiede *infiniti punti multipli.*

Definiamo la linea per modo che i suoi *punti* siano *semplici*; diremo dunque *linea continua* un luogo di punti:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

Digitized by Google

rappresentato da funzioni continue ed univocamente invertibili, entro un intervallo $(t_1\ t_2)$. E *chiusa* la linea i cui estremi coincidono. La linea così definita aderisce veramente alla nozione intuitiva? È lecito dire, di una siffatta linea l, che divide il piano in due parti o regioni di punti, per modo che la linea continua, congiungente due punti di regioni diverse, abbia con l almeno un punto a comune?

La domanda così precisata ha ricevuto una risposta affermativa da CAMMILLO JORDAN. JORDAN dimostra il suo teorema iscrivendo nella linea dei poligoni con lati sufficientemente piccoli, i quali si accostano quanto si vuole alla l stessa. Un tale poligono P determina in generale un certo numero di regioni piane, in guisa che non si può passare dall'una all'altra, con una linea continua, senza attraversare il contorno di P: le regioni sono soltanto due, se P è un poligono sciolto, ma non si può escludere che esso resulti intrecciato.

Tuttavia in quest'ultimo caso si avrà una regione interna di dimensioni finite, una regione esterna infinita e un certo numero di regioni suscettibili di diventare piccole ad arbitrio e di dare anzi una somma ugualmente infinitesima. Così — a prescindere da una superficie infinitesima, che al limite si riduce alla linea l — vengono definite due regioni piane, una finita e l'altra infinita, che sono quelle in cui l divide il piano: per modo che una linea continua, congiungente un punto di una regione con un punto dell'altra, necessariamente avrà con l qualche punto a comune.

Ora la dimostrazione di JORDAN riesce alquanto laboriosa, tantochè appare desiderabile di sostituirgliene un'altra più semplice. Ciò è stato fatto, in una forma sintetica, da PIERO BENEDETTI (1), sulla base di un'analisi che deriva il concetto di linea continua dalla distinzione critica delle sue *proprietà interne* ed *esterne*, stabilita da ENRIQUES.

Per chi consideri una linea aperta l, secondo una veduta interna, la l è una serie di punti ordinata secondo due versi opposti per la quale dunque si pone, come per la retta, la nozione di « segmento » o « arco »; e la *continuità interna* di l si esprime, come per il segmento rettilineo col *postulato* cui abbiamo dato il nome di DEDEKIND. Ma questo postulato non implica affatto la *continuità*

(1) « Periodico di Matematica », 1911. Cfr. *Il teorema di Jordan sulle linee*, in « Periodico di Matematica », Marzo 1923.

Digitized by Google

(*esterna*) della linea *nel piano*, per cui « un punto P di l, che sia *limite* d'un gruppo di punti G sopra l (nel senso che ad ogni arco contenente P nel suo interno appartengano sempre punti di G) deve essere limite di G anche nel piano, ad ogni cerchio di centro P appartenendo sempre punti del detto G ». Infatti si consideri l'insieme dei punti costituito:

1) dai punti di ascissa razionale che si trovano nel segmento (0 1) dell'asse x;

2) e dai punti irrazionali del segmento parallelo, appartenente alla retta $y = 1$, compreso fra le rette $x = o$ e $x = 1$. Questo insieme di punti viene ordinato in modo continuo, secondo l'ordine delle ascisse crescenti; ma un punto irrazionale P (del 2° segmento) che figura, entro di esso e per riguardo al detto ordine, come limite di un gruppo G di punti razionali (del 1° segmento), non è affatto limite di G, nel piano che contiene tutto l'insieme e in particolare anche P e G.

Questa osservazione critica pone in evidenza la definizione sintetica della linea continua nel piano (1).

Dicesi linea continua nel piano un insieme di punti l *ordinati secondo ordini naturali, l'uno inverso dell'altro, per modo che*:

1) *ogni ordine di* l *è continuo, soddisfacendo al postulato di* DEDEKIND;

2) *ogni punto che sia limite d'un gruppo di punti* G *sopra* l, *rispetto all'ordine anzidetto, è anche limite del gruppo* G *nel piano, e viceversa.*

La linea elementare l, così definita, è una *linea elementare sciolta* ed *aperta* (cioè possiede due *estremi* distinti) se la proprietà d'ordinamento viene strettamente intesa; ma si possono anche considerare linee continue con *punti doppi* o *multipli*, in cui qualche punto occupi due posti successivi nell'ordine di l, pensandosi dunque come posizione di *punti sovrapposti*. Aggiungasi che congiungendo due linee elementari per gli estremi, si definirà una *linea continua chiusa*, la quale dovrà dirsi *sciolta*, se le due linee congiunte non hanno altri punti comuni, fuori degli estremi.

Vediamo come la definizione posta delle linee continue per-

(1) Cfr. F. ENRIQUES, *Conferenze di Geometria*, litografie, Bologna, 1894-95, pagg. 4-5; *Sulle ipotesi che permettono l'introduzione delle coordinate in una varietà a più dimensioni*, in « Atti del Circolo Mat. di Palermo », 1898, n. 3, e anche l'articolo sui *Principî della Geometria*, nell'« Enciclopedia delle Scienze matematiche », Ed. ted., 1907, francese 1911, n. 23.

Digitized by Google

metta di stabilire le proprietà fondamentali che rispondono al concetto intuitivo, giungendo fino al teorema di JORDAN.

Diciamo *campo piano* C, un insieme di punti d'un piano siffatto che due punti P_1, e P_2 di C vengano congiunti da una linea tutta appartenente a C e che per ogni punto di esso esista un intorno circolare tutto contenuto in C; i punti limiti, non appartenenti al campo, ne costituiscono la *frontiera*.

Ora si può dimostrare il

1° *Lemma*. Se una linea, o un altro qualunque insieme l di punti, appartiene ad un campo piano C, e se i punti rimanenti di C si possono raggruppare in due campi distinti C_1 e C_2, allora ogni linea $P_1 P_2$ contenuta in C — che congiunga un punto P_1 di C_1 con un punto P_2 di C_2 — incontra necessariamente l; anzi esiste un primo e un ultimo punto d'incontro, nel senso $P_1 P_2$.

Infatti si dividano i punti di $P_1 P_2$ in due parti: chiamiamo X e attribuiamo alla prima parte un punto tale che l'arco $P_1 X$ appartenga interamente a C_1, ed Y ogni altro punto della linea. Si ha così una divisione di DEDEKIND, e il punto di divisione appartiene ad l; anzi è il primo punto d'incontro nell'ordine $P_1 P_2$.

Ciò posto si consideri una striscia di piano limitata da due parallele x, y e *attraversata* da una linea l che abbia un estremo A su x e uno B su y. Dimostriamo che l divide il campo interno alla striscia in due regioni R_1 e R_2 tali che ogni linea $P_1 P_2$, congiungente un punto P_1 di R_1 con un punto P_2 di R_2 ed interna ad xy incontra necessariamente l.

La cosa è manifesta se l è una spezzata priva di nodi: basta allora condurre per i vertici le parallele ad x e decomporre così la striscia xy in altre, ciascuna delle quali è attraversata e divisa in parti da segmenti di l, ed attribuire ad R_1 e R_2 le successive parti alternativamente, cominciando dalla prima in un senso stabilito. Per trattare il caso generale, tracciamo due segmenti x' e y' perpendicolari ad x e y in guisa che la linea l risulti interna al rettangolo $xx'yy'$; prendiamo P_1 su x' e poniamo in R_1 quei punti del campo xy che si possono *raggiungere* con spezzate partenti da P_1, interne alla striscia e non incontranti l; attribuiamo invece a R_2 tutti gli altri punti interni alla striscia fuori di l: è facile vedere che appartiene a R_2 ogni punto P_2 del segmento y', perchè ogni spezzata $P_1 P_2$ (che possiamo supporre sciolta) divide la striscia $x'y'$ per modo che la linea l deve incontrarla secondo il 1° lemma.

Ora è facile vedere che la distanza di un punto dai punti della

Digitized by Google

linea *limitata* l, ha sempre un minimo, e da ciò si deduce che R_1 e R_2 sono due campi piani: solo che R_1 risulterà connesso, mentre R_2 sarà spezzato in più campi se l possiede dei nodi.

Al caso della striscia si riportano facilmente i seguenti:

1° Un cerchio è diviso in due regioni da ogni linea che ha gli estremi sulla circonferenza e lo *attraversa*;

2° L'anello circolare è diviso in due regioni da due linee che hanno un estremo sulla circonferenza maggiore e uno sulla minore e lo *attraversano*; dei due archi nei quali gli estremi delle linee dividono la circonferenza maggiore, uno è *adiacente* all'una e uno all'altra regione.

Quindi siamo in grado di dimostrare il

2° LEMMA. — *Se una linea limitata e sciolta* l = AB (*che può essere anche chiusa*: A = B) *divide il piano in più regioni connesse, e* R *è una di queste, ogni punto di* l *è limite di* R.

Riproduciamo il sottile ragionamento di BENEDETTI, che procede per assurdo; supponiamo dunque che esista un punto di l nel cui intorno (sufficientemente piccolo) non cadono punti di R. In tale ipotesi si può determinare un tratto NO di l (nel senso AB) tutto costituito di tali punti, *eccettuati gli estremi*. NO non può coincidere con AB, e potremo supporre che O sia diverso da B. Preso U di R, descriviamo tre cerchi c, c', c'' di centro O (fig. 9), in questo modo c lasci fuori U, B e il tratto AN di l; dette S e T le prime intersezioni di OA e OB coi c, c' lasci fuori i tratti AS e TB; dette S' e T' le prime intersezioni di OA e OB con c', c'' lasci fuori i tratti AS' e $T'B$. Siano S'' e T'' le *ultime* intersezioni di OA e OB con c''. Così SS'' e TT'' sono interni all'anello cc'', e i tratti AS e TB non penetrano in c'.

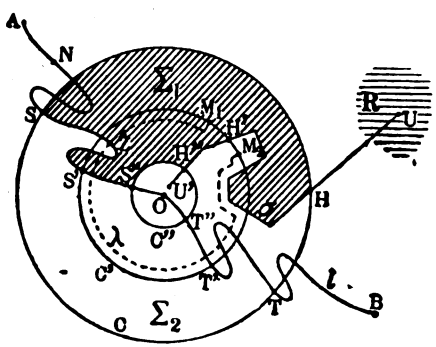


Fig. 9.

Preso U' di R interno a c'', si può tracciare una spezzata $\sigma = U'U$ tutta in R; sia H'' la sua ultima intersezione con c'', H' e H le prime intersezioni di $H''U$ con c' e c. Conserviamo, di σ, solo il tratto $H''H$ interno a cc'', trascurando il resto. Il tratto $H'H''$ è interno all'anello $c'c''$, ma ci possono essere anche delle *anse* del tratto HH' di σ che penetrino in c'; però è da ricordare che σ è

Digitized by Google

spezzata, e perciò può incontrare c' solo in un numero finito di punti.

L'anello cc'' è diviso dalle linee SS'' e HH'' in due regioni Σ_1 e Σ_2 *adiacenti* ai due archi SH di c; e TT'' sta in una di queste, p. es. in Σ_2. Su c' possiamo prendere M_1 e M_2 sufficientemente vicini ad H', in modo che M_1 sia in Σ_1 e M_2 in Σ_2: ed è accertabile che si può costruire una linea formata di segmenti ed archi di cerchio, $\lambda = M_1M_2$, interni a c', che non incontri $H'H''$ nè le anse di HH' che penetrano in c', e abbia ogni suo punto così vicino a c' o a una di queste anse da non incontrare il tratto $S''T''$ di l, interno a c'. La linea λ, congiungendo M_1 di Σ_1 con M_2 di Σ_2, deve, prima di uscire da Σ_1, incontrare una delle linee che determinano le due regioni, e non incontrando HH'' incontrerà SS'' in un primo punto Z. Poichè, d'altra parte, λ non ha potuto incontrare altri tratti di l, ed M_1 per la sua vicinanza ad H' è nella regione R, anche tutto il tratto M_1Z di λ (eccetto Z) è in R. E da ciò si deduce che in ogni intorno di Z sono punti di R, contro l'ipotesi che il tratto NO (di cui è parte SS') sia privo di tali punti.

Ora dal 2° lemma così stabilito deduciamo il

Teorema. — *Una linea piana* $l \equiv AB$ *limitata o chiusa, senza nodi, non può dividere il piano in più di due regioni connesse.*

Supponiamo che di tali regioni ne esistano tre R_1, R_2, R_3, di cui U_1, U_2, U_3 siano tre punti, e ripetiamo le costruzioni precedenti prendendo per O un punto qualunque di l e c tale da lasciar fuori A, B, U_1, U_2, U_3. Entro c'' potremo considerare U_1', U_2', U_3' di R_1, R_2, R_3, rispettivamente, e tracciare in quelle regioni tre spezzate $\sigma_1 \equiv U_1'U_1$, $\sigma_2 \equiv U_2'U_2$, $\sigma_3 \equiv U_3'U_3$, di cui poi conserveremo solo i tratti $H_1''H_1$, $H_2''H_2$, $H_3''H_3$.

Dei tre archi nei quali H_1, H_2, H_3 dividono c se ne ha uno almeno nel quale non si trova nè S nè T; sia esso H_1H_2. Se consideriamo le regioni Σ_1 e Σ_2 nelle quali H_1H_1'' e H_2H_2'' dividono l'anello cc'', e la prima è quella *adiacente* all'arco H_1H_2, i tratti SS'' e TT'' sono tutti in Σ_2 (fig. 10). Su c' potremo prendere M_1 e M_2 sufficientemente vicini a H_1' in modo che M_1 sia in Σ_1 e M_2 in Σ_2, e potremo costruire una linea $\lambda \equiv M_1M_2$ interna a c', che non incontri nè H'_1H_1'' nè le *anse* di H_1H_1' interne a c', nè il tratto $S''T''$ di l. È certo che λ, prima di uscire da Σ_1, deve incontrare H_2H_2'' in un primo punto Z. Ma, mentre M_1 è in R_1 per la sua vicinanza ad H_1, Z è in R_2; onde sul tratto M_1Z di λ deve trovarsi un punto di l.

D'altra parte, questo punto non potrebbe trovarsi sul tratto

Digitized by Google

$S''T''$, che non incontra λ, nè sui tratti SS'' e TT'' che sono in Σ_2, nè sui tratti AS e BT che sono esterni a c'; di qui l'assurdità dell'ipotesi.

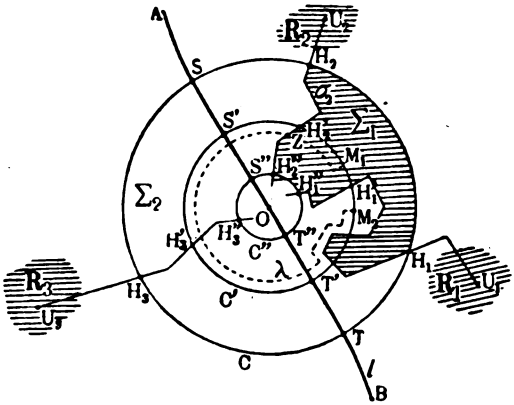


Fig. 10.

Le due dimostrazioni precedenti si possono ripetere per una linea $l \equiv AB$ limitata o chiusa, senza nodi, contenuta, anzichè in un piano, in un campo piano connesso C qualunque, a meno degli estremi A e B che possono essere anche sulla frontiera di C; se ne conclude che *le regioni connesse nelle quali* l *divide* C *non possono mai essere più di due, e che ogni punto di* l *è limite di ciascuna di esse.* In particolare ciò vale per il caso della striscia già considerato in principio; le due regioni costruite in quel caso, ammessa l senza nodi, sono dunque ambedue connesse, giacchè, se così non fosse, se ne potrebbero ricavare più di due regioni connesse, nelle quali sarebbe diviso il campo interno alla striscia.

Ma veniamo a considerare il caso di una linea l del piano, chiusa e priva di nodi; possiamo considerarla come interna a una striscia xy, e da due punti A e B di x e y tracciare due linee interne a xy che vadano ad incontrare l in due primi punti A' e B'. Questi dividono l in due tratti l' e l''; ciascuna delle linee $\lambda' \equiv AA'l'B'B$, $\lambda'' \equiv AA'l''BB'$ determina nell'interno di xy una divisione in due regioni, R'_1 e R_2' per λ', R_1'' e R_2'' per λ'', e se supponiamo che l'' sia, rispetto a λ', nella regione R_2', è facile vedere che esistono punti comuni a R_2' e R_1'', mentre R_1' è contenuto in R_1'', e R''_2 in R_2' (fig. 11).

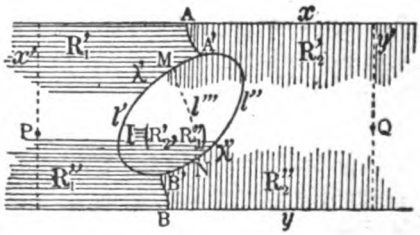


Fig. 11.

L'insieme dei punti comuni a R_2' e R_1'' è una regione $I \equiv (R_2', R_1'')$; tutti i punti del piano che non sono nè in I nè in l costituiscono un'altra regione E; e poichè I ed E sono due campi,

Digitized by Google

è certo che ogni linea del piano che unisce un punto di I con un punto di E incontra necessariamente l. Dato che l divide il piano in due regioni, queste, secondo quanto abbiamo veduto sopra, non possono essere altro che connesse, e ogni punto di l è limite di ciascuna di esse. Così *il teorema di* JORDAN *è completamente dimostrato.*

§ 10. **Esistenza di un poligono con dati lati inscrittibile in un cerchio.** — Indicheremo ora un'altra applicazione elementare del postulato di DEDEKIND, porgendo la dimostrazione dell'esistenza di un cerchio in cui è inscrittibile un poligono di dati lati

$$a_1\, a_2 \;....\; a_n,$$

naturalmente soddisfacenti alla condizione che ciascuno sia minore della somma dei rimanenti, o, supposto che a_n non sia minore di alcuno dei rimanenti, per cui si abbia

$$a_n < a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}.$$

In questa ipotesi si costruisca il triangolo LAB in cui

$$AB = a_n$$

$$LA = LB = \frac{1}{2}\,(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1})$$

Il cerchio C che passa per A e B ed è tangente in questi due punti ai lati LA ed LB è diviso dai punti A e B in due parti, la minore delle quali è dalla parte di L ed è interna al triangolo ALB.

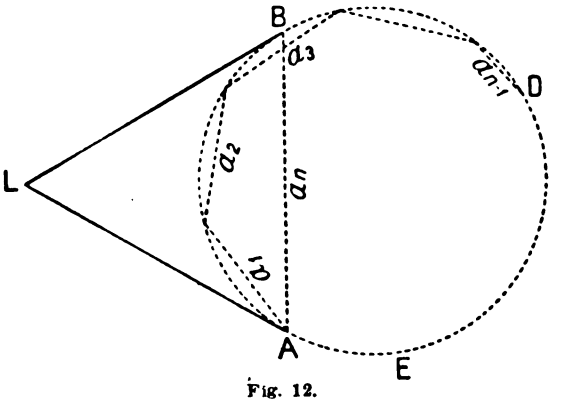


Fig. 12.

Riferendoci alla fig. 12, facciamo la convenzione di indicare ogni arco del cerchio C nominando prima l'origine e poi il termine dell'arco pensato percorso in senso negativo (cioè nel senso del

Digitized by Google

movimento delle lancette dell'orologio). Con questa convenzione la porzione di C interna al triangolo LAB sarà indicata con AB e la rimanente con BA.

Inscriviamo in C a partire da A e dalla parte di L una poligonale di lati

$$a_1 , a_2 , \dots a_{n-1}.$$

L'estremo D di questa poligonale cadrà evidentemente al di là di B, poichè ogni poligonale inscritta nell'arco AB o in una parte di esso è minore di $AL + LB$ cioè minore di

$$a_1 + a_2 + \dots a_{n-1}.$$

Prendiamo ora nell'arco BA un punto E, per cui l'arco EA sia minore di $\frac{1}{n}$ della circonferenza e per ogni punto P dell'arco BE (estremi inclusi) si costruisca la corda PA e la poligonale uscente da A e dalla parte di L inscritta in C, i cui lati

$$a_1' \; a_2' \dots a'_{n-1},$$

siano tali che

$$\frac{a'_1}{a_1} = \frac{a'_2}{a_2} = \dots = \frac{a'_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{PA}{a_n}.$$

Può accadere che il termine Q di questa poligonale, che chiameremo l'omologo di P, segua oppure preceda P nel senso negativo.

Se P coincide con B il punto Q segue certamente P. Se P coincide con E il suo omologo precede P, perchè in tal caso ciascuno dei lati

$$a_1' \; a_2' \dots a'_{n-1},$$

essendo minore o uguale a PA è inscritto in un arco minore di $\frac{1}{n}$ della circonferenza di C e l'arco in cui è inscritta la poligonale che ha questi lati è minore di $\frac{n-1}{n}$ della circonferenza di C, e quindi l'estremo Q cade dentro l'arco AE, ossia precede E.

Indichiamo con H ogni punto dell'arco BE tale che ogni punto P dell'arco BH sia seguìto dall'omologo Q, e con K ogni punto rimanente dell'arco BE.

Siccome ogni punto H precede ogni punto K e ogni punto dell'arco BE appartiene o alla classe dei punti H o a quella dei K

Digitized by Google

ed inoltre esiste almeno un punto H e almeno un punto K, esiste dunque un punto X dell'arco BE, tale che ogni punto dell'arco BE che precede X appartiene alla classe degli H e ogni punto dell'arco BE che segue X appartiene alla classe dei K.

Dico che X coincide con l'omologo Q_x, e che quindi la corda XA e la poligonale relativa al punto X costituiscono un poligono P_n' inscritto nel cerchio C e che ha i lati proporzionali ai segmenti

$$a_1 , a_2 ,\dots a_{n-1} , a_n.$$

Per dimostrare che il punto Q_x coincide con X, comincio col notare che se due punti P e P' distano di un arco α, le corde AP e AP' differiscono per meno di α e quindi ciascun lato della poligonale relativa a P differisce per meno di α dal lato omologo α della poligonale relativa a P', e perciò, se indichiamo con β l'arco che sottende una corda di lunghezza α, ogni arco che sottende un lato della 1ª poligonale differisce per meno di β dall'arco che sottende il lato omologo della 2ª poligonale, e infine i due archi

$$AQ \text{ e } AQ'$$

i cui estremi sono gli omologhi di P e P' differiscono per meno di $(n-1)\,\beta$.

Ciò posto dimostriamo che X non può nè precedere nè seguire il suo omologo Q_x.

Supponiamo che X preceda Q_x.

Sia $n\beta$ la lunghezza dell'arco XQ_x, e sia α la lunghezza della corda sottesa dall'arco di lunghezza β (è $\alpha < \beta$). Considero un punto X' compreso fra X e Q_x e tale che l'arco XX' abbia lunghezza minore di α (fig. 13).

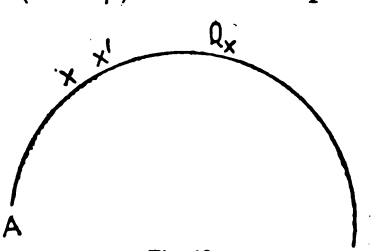


Fig. 13.

Il punto X' ha per omologo un punto Q_x' che deve distare da Q_x di un arco minore di $(n\text{-}1)\,\beta$ e che deve quindi seguire X'. Si ha così che ogni punto P dell'arco XX' è seguito dal punto omologo Q, quindi X' è un punto di H mentre esso deve essere un punto di K venendo dopo X che è punto di separazione delle due classi.

In modo analogo si dimostra che X non può seguire l'omologo Q_x.

Digitized by Google

Resta così dimostrato che Q_x coincide con X e che esiste un poligono P'_n inscritto nel cerchio C i cui lati sono proporzionali ai segmenti

$$a_1 , a_2 , \dots . a_{n-1} , a_n .$$

Costruiamo ora il poligono P_n simile a P'_n e avente per lati

$$a_1 , a_2 \dots . a_{n-1} , a_n .$$

Anche P_n sarà inscritto in un cerchio ed è quindi il poligono cercato.

§ 11. **Teorema fondamentale della proiettività.** — A complemento degli sviluppi contenuti in questo articolo, ci proponiamo ora di riconoscere come il postulato della continuità, nella forma grafica che abbiamo designato col nome di DEDEKIND, permetta di rispondere alla questione fondamentale della Geometria proiettiva, che è stata posta e chiarita nell'Art. Secondo, dimostrando il teorema fondamentale dello STAUDT (1).

Ricordiamo che dalla considerazione dell' omografia piana (definita come corrispondenza che trasforma le rette in rette) si è tratti a definire la *proiettività* fra due rette come *corrispondenza armonica*, ciò che conserva i gruppi armonici. Poichè è facile passare con proiezioni e sezioni da una retta ad un' altra, in guisa che a tre punti A, B, C corrispondano ordinatamente tre punti A', B', C', si vede che esiste certo una proiettività fra due rette in cui si corrispondono tre coppie assegnate di punti omologhi. Ora si vuol dimostrare che «la proiettività in cui si corrispondono tali coppie è unica, e quindi determinata da esse». Tutto si riduce al caso in cui i punti omologhi AA', BB', CC', siano portati (con proiezioni) a coincidere, cioè occorre dimostrare che

«*Se una proiettività sopra la retta possiede tre punti uniti, essa è identica, cioè tutti i punti della retta sono uniti*».

Per stabilire questo teorema, dimostriamo prima di tutto che *la proiettività è una corrispondenza biunivoca ordinata*, ammettendo che ciò accade quando la proiettività si ottiene mediante proiezioni e sezioni (2).

(1) Cfr. F. ENRIQUES, *Lezioni di Geometria proiettiva*, Cap. IV e V.

(2) Postulato che afferma il carattere proiettivo della disposizione circolare naturale (Articolo Secondo, § 52).

Digitized by Google

A tal fine basta dimostrare che a due coppie di punti AB e CD che non si separano devono corrispondere due coppie $A'B'$ e $C'D'$ che non si separano.

Questo risultato si consegue dimostrando che se e soltanto se due coppie AB e CD non si separano esiste una coppia EF che le separa armonicamente entrambe. Infatti da questo teorema deriverebbe che, se le due coppie AB e CD non si separano ed EF è la coppia che le separa armonicamente entrambe, e se $E'F'$ sono i corrispondenti di EF nella proiettività, la coppia $E'F'$ separa armonicamente le coppie $A'B'$ e $C'D'$ e quindi le coppie $A'B'$ e $C'D'$ non si separano.

Ora, se sopra una retta p sono dati due punti E e F e per E e per F si conducono le rette EL e FL aventi il punto comune L, e se infine su LF si prende un punto M e si tira la retta EM, il coniugato armonico B di un punto A rispetto ad EF si determina proiettando A da M su EL in K, proiettando K da F su EM in N e infine proiettando N da L sulla p (fig. 14).

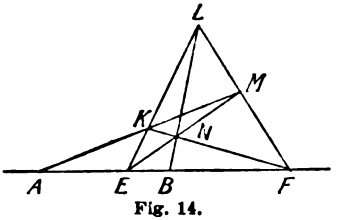


Fig. 14.

La corrispondenza fra A e B si costruisce dunque con un numero finito di proiezioni e sezioni e quindi è una corrispondenza ordinata. In questa corrispondenza i punti E ed F sono uniti e quindi, se A e B sono due punti corrispondenti non uniti, mentre un punto descrive il segmento AEB, il corrispondente descrive lo stesso segmento nell ordine inverso BEA, e analogamente mentre un punto descrive il segmento AFB, il corrispondente descrive lo stesso segmento nell'ordine inverso BFA. Allora se C e D sono altri due punti corrispondenti nella corrispondenza considerata, o essi cadono entrambi nel segmento AEB o entrambi in AFB, e in ogni caso non separano AB. Risulta così intanto che se due coppie AB e CD sono separate armonicamente da una medesima coppia EF, le due coppie AB e CD non si separano. Resta a dimostrare la proposizione inversa, e cioè che se due coppie AB e CD non si separano, esiste una coppia che le separa armonicamente entrambe. E qui ricorre il postulato di Dedekind.

Supponiamo che AB e CD non si separino e consideriamo su p la corrispondenza che nasce tra i punti X e X' che sono coniugati armonici di uno stesso Y rispetto alle coppie AB e CD. Essa è il prodotto di due riferimenti di p a se stessa mediante proiezioni e

Digitized by Google

sezioni, quindi si passa da X a X' con un numero finito di proiezioni e sezioni e perciò la corrispondenza fra X e X' è ordinata.

Ora si consideri il segmento $ACDB$ (o $ADCB$) della retta p. Un punto X di esso ha rispetto ad AB un coniugato armonico Y nel segmento AB complementare, ed il coniugato armonico X' di Y rispetto a CD cade nel segmento CD interno ad $ACDB$, e quindi mentre il punto X si muove descrivendo il segmento $ACDB$ il corrispondente si muove entro questo segmento. Io dico che esiste almeno un punto X di $ACDB$ che coincide col corrispondente X' e che quindi esiste una coppia XY che separa armonicamente le coppie AB e CD.

Perciò basta provare che *se su* p *è data una corrispondenza biunivoca ordinata, in cui ad un segmento* AB *corrisponde un segmento* A'B' *in esso contenuto, esiste un punto unito* M *appartenente ad* A'B' (*e quindi ad* AB) *tale che nel segmento ordinato* AB *non esiste alcun elemento unito della corrispondenza, precedente* M.

Trattandosi di segmenti contenuti nel dato AB, li designeremo denotandone solo gli estremi. Se A coincide con A' il teorema è senz'altro verificato. Se A non coincide con A' e se la corrispondenza è concorde, cioè il segmento $A'B'$ ha lo stesso senso di AB, noi possiamo indicare con H ogni punto di AB tale che esso e ogni precedente in AB preceda il proprio corrispondente (almeno A è un punto H) e indicare con K ogni punto rimanente di AB (almeno B è un punto K). Pel postulato di Dedekind esiste allora un punto M di AB tale che ogni punto che precede M è un punto H e ogni punto che segue M è un punto K. Sia M' l'omologo di M, e supponiamo che M' preceda M. Allora un punto interno al segmento MM' è un punto H e il suo omologo deve seguirlo, ma d'altra parte (fig. 15) poichè la corrispondenza è concorde l'omologo di H deve precedere M', dunque è assurdo quanto è supposto. Similmente si giunge all'assurdo supponendo che M' consegua ad M, poichè allora ogni elemento di MM' precederebbe il corrispondente, e poichè anche M precede M', i punti di MM' sarebbero punti H. Dunque M' coincide con M, ossia M è unito (mentre non è unito alcun elemento che precede M).

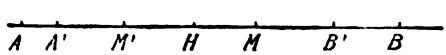


Fig. 15.

Finalmente se la corrispondenza è discorde, cioè se $A'B'$ ha senso opposto ad AB, noi possiamo indicare con H ogni punto di AB che precede il suo corrispondente e con K i rimanenti punti

Digitized by Google

di AB (A è un punto H e B è un punto K). Allora poichè la corrispondenza è discorde, ogni punto H precede ogni punto K. Infatti, se H_1 è un elemento qualsiasi precedente ad H, il suo omologo H_1' consegue al corrispondente H' di H ed *a fortiori* ad H e ad H_1. Onde H_1 non può essere un punto K.

Si deduce, pel postulato della continuità, che esiste un punto M di AB tale che ogni punto precedente ad M è un punto H, ed ogni punto conseguente ad M è un punto K (ad M non precedono elementi uniti).

Dico che M è unito, e anzitutto osservo che ogni punto H di AB precedente ad M ha l'omologo H' nel segmento MB. Infatti se H_1 è un elemento intermedio fra H ed M (in AB) ed H'_1 è l'omologo di H_1, deve H' seguire H'_1 e quindi H_1, onde H' consegue a tutti gli elementi che precedono M. Analogamente si prova che un elemento K che consegue ad M (in AB) ha l'omologo K' in AM.

Ora sia M' l'omologo di M e supponiamo che M' preceda M (fig.16). Allora M è distinto da A e quindi A' da M'; il segmento $A'M'$ avendo l'estremo M' interno ad AM ha con esso infiniti punti interni comuni; uno di questi H' (precedente ad M) è l'omologo di un elemento H di AM, ciò che è assurdo.

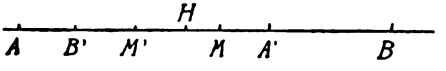


Fig. 16.

Parimenti si prova l'assurdità che M' segua M.

Ora supponiamo che sulla retta p si abbia una proiettività con tre punti uniti ABC. Se la proiettività che si considera non fosse identica esisterebbe su p un punto D a cui corrisponderebbe un punto D' diverso da D.

In tale ipotesi dico che vi è su p un segmento YX avente gli estremi uniti, entro cui non cadono elementi uniti della proiettività. Se, per fissare le idee, supponiamo che D cada nel segmento AB non contenente C, D' dovrà cadere nello stesso segmento, perchè, la coppia DC separando AB, anche la coppia $D'C$ deve separare AB. Dunque il segmento ADB corrisponde a se stesso. Ancora, per fissare le idee (è indifferente ammettere l'ipotesi opposta) si supponga che D' consegua a D nell'ordine (ABC), cioè nel nostro segmento ordinato ADB. Riferiamoci ai segmenti contenuti in ADB, che possiamo indicare denotandone solo gli estremi. Abbiamo che agli elementi del segmento DB corrispondono nella data proiettività quelli del segmento $D'B$ interno ad esso (essendo il segmento

Digitized by Google

ADB corrispondente a se stesso), cioè mentre un punto si muove descrivendo il segmento DB il punto corrispondente si muove descrivendo $D'B$.

Dunque esiste in $D'B$ un primo punto X unito (che può coincidere con B) tale che in DX non cadono altri punti uniti. In modo analogo, ragionando sulla proiettività inversa della data (che ha i medesimi elementi uniti) si deduce l'esistenza di un elemento unito Y in DA (che può essere lo stesso A) tale che nel segmento DY non cadono altri elementi uniti della proiettività.

Si perviene così a stabilire l'esistenza di un segmento YX contenuto in ADB il quale ha per estremi dei punti uniti ed è tale che dentro di esso non vi sono punti uniti. Ciò è assurdo.

Infatti il coniugato armonico C' di C rispetto ad YX è pure un punto unito della proiettività ed è interno al segmento YX.

È così provato che la nostra proiettività è identica, e quindi è dimostrato il teorema di STAUDT, sopra enunciato.

§ 12. **Il teorema della proiettività e l'equazione funzionale di Darboux.** — La questione che viene risoluta dal teorema fondamentale della proiettività può essere illuminata sotto un altro aspetto, facendo vedere come essa si colleghi ad un semplice problema di analisi funzionale, a cui appunto venne ricondotta da DARBOUX.

In questa analisi si suppongono già introdotte sopra la retta le coordinate cartesiane, e si prendono come uniti per la proiettività i tre punti $0, 1, \infty$; la corrispondenza proiettiva viene rappresentata da una funzione

$$y = f(x);$$

e si dovrà dimostrare che la conservazione dei gruppi armonici porta ad attribuire ad f tali proprietà per cui

$$f(x) = x.$$

Osserviamo in primo luogo che, presi sulla retta due punti x, y, il coniugato armonico del punto ∞ è $\frac{x+y}{2}$, quindi al gruppo armonico

$$x, y, \frac{x+y}{2}, \infty$$

Digitized by Google

corrisponderà un gruppo

$$f(x), f(y), \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad f(\infty) = \infty$$

che deve pure essere armonico: ciò porta che sia

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Ma in secondo luogo anche il gruppo armonico

$$o, \ 2x, \ x, \ \infty$$

dà un gruppo armonico

$$f(o) = o, \ f(2x), \ f(x), \ f(\infty) = \infty,$$

sicchè si deduce

$$f(2x) = 2f(x),$$

e quindi l'equazione precedente assume la forma

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Questa è appunto l'*equazione funzionale di* Darboux, che in verità corrisponde al problema della proiettività nell'ipotesi più generale in cui siano dati soltanto i punti uniti $x = \infty$ e $x = o$ $(f(\infty) = \infty, \ f(o) = o)$ (1); si dovrà poi aggiungere la condizione restrittiva

$$f(1) = 1.$$

(1) La (1) porta infatti, per n intero e positivo,

$$f(nx) = nf(x),$$

donde

$$f(\infty) = \infty$$

e

$$f(x+o) = f(x) + f(o) = f(x),$$

donde

$$f(o) = o.$$

Digitized by Google

Ora se si tratta l'equazione 1) coi procedimenti ordinari del Calcolo, supponendo la funzione f continua e derivabile almeno per $x = o$, si trova subito la soluzione generale, perchè per h qualunque si ha

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{f(h)-f(o)}{h},$$

e quindi — passando al limite per $h = o$ —

$$f'(x) = f'(o) = a \text{ (costante)},$$

donde — tenuto conto della condizione $f(o) = o$ —

$$f(x) = ax.$$

Ma, per essere

$$f(1) = 1,$$

segue

$$a = 1, f(x) = x.$$

È anche facile emanciparsi dall'ipotesi *a priori* che $f(x)$ sia derivabile per $x = o$, solo che si ammetta la sua continuità per x qualunque: come vedremo fra poco. Se invece si prescinde da ogni restrizione di tal natura, si possono trovare funzioni f, ovunque discontinue, soddisfacenti all'equazione 1).

Senza indugiarci su tale esame, vogliamo anzitutto mettere in luce che — per quanto concerne la questione fondamentale della proiettività — « la conservazione dei gruppi armonici, ulteriormente sfruttata, permette di riconoscere che la funzione f è *sempre crescente*, e quindi continua ».

A tal uopo basta osservare che i punti

$$x, \ -x, \ 1, \ x^2$$

formano un gruppo armonico, e perciò, se la f conserva i gruppi armonici, sarà armonico anche il gruppo

$$f(x), \ f(-x) = -f(x), \ f(1) = 1, \ f(x^2),$$

e si dovrà avere

$$f(x^2) = [f(x)]^2.$$

Digitized by Google

Quindi, per x positivo ($x = y^2$) sarà sempre $f(x)$ positivo, e per conseguenza: per $h > o$

$$f(x + h) = f(x) + f(h) > f(x).$$

Ora è facile trovare la funzione continua $f(x)$ che costituisce la soluzione generale dell'equazione funzionale

$$[1] \qquad f(x + y) = f(x) + f(y),$$

e soddisfa inoltre alla condizione

$$f(1) = 1.$$

Perciò rileviamo che dalla [1] si trae

$$f(-x) + f(x) = o, \quad f(-x) = -f(x).$$

e — per n intero qualunque —

$$f(nx) = n\,f(x);$$

quindi

$$f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right), \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n},$$

e — qualunque sia il numero razionale $\frac{m}{n}$ —

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}.$$

Dopo ciò, la continuità di f dà subito per ogni valore, anche irrazionale, di x:

$$f(x) = x$$

Osservazione. — Da ciò che precede resulta come il teorema fondamentale della proiettività dipenda dall'introduzione delle coordinate sopra la retta, dove viene fatto uso implicito del postulato della continuità.

Giova notare che gli sviluppi esposti si possono rendere indipendenti dal concetto della congruenza, stabilendo — per dir così — una *misura proiettiva* dei segmenti, in rapporto a tre punti dati 0, 1, ∞. Infatti con costruzioni di quarti armonici a partire dai tre punti, si definirà il *sistema armonico*, costituito dai punti cui spetta una coordinata razionale $\frac{m}{n}$, e si otterranno poi tutti gli altri punti, come punti limiti (De Paolis).

Digitized by Google

Per definire i punti razionali del sistema armonico, basterà fare le seguenti osservazioni:

1) il punto 2 è il coniugato armonico di 0 rispetto a 1, ∞, e così il punto 3 è il coniugato di 2 rispetto a 1, ∞ ecc.;

2) il punto -1 è il coniugato di 1 rispetto a 0, ∞, quindi -2 è il coniugato di 0 rispetto a 1, ∞ ecc.;

3) il punto $\frac{1}{2}$ è il coniugato di ∞ rispetto a 0, 1; $\frac{1}{4}$ è il coniugato di ∞ rispetto a 0, $\frac{1}{2}$ ecc.;

4) per n intero e positivo, il punto $\frac{n}{2n-1}$ si ottiene come coniugato armonico di n rispetto a 0, 1, e quindi si ottiene $\frac{1}{2n-1}$ come coniugato di 1 rispetto a $\frac{n}{2n-1}$, ∞. Non c'indugeremo più oltre su questi sviluppi, che ognuno può ormai completare da sè. Ma diremo che — come dall'introduzione delle coordinate, cartesiane o proiettive, si può trarre, coll'analisi di DARBOUX, il teorema fondamentale della proiettività — così, reciprocamente, la teoria basata su questo teorema, conduce a porre assai semplicemente le coordinate proiettive: si tratta invero di porre una corrispondenza per isomorfismo fra un gruppo permutabile di proiettività paraboliche sopra la retta, e il gruppo delle sostituzioni $x' = x + k$ agenti sull'insieme dei numeri reali, x. Questo sviluppo si trova nell'Appendice alle *Lezioni di Geometria proiettiva* dell'ENRIQUES.

Digitized by Google

ARTICOLO SESTO

I numeri reali, di Federigo Enriques a Roma.

Parte prima. — I numeri naturali.

I. — Introduzione storica.

§ 1. **Origine del concetto.** — I *numeri naturali* 1, 2, 3..., si affacciano fin dalle civiltà primitive; il loro possesso è chiaramente definito dall' uso che se ne fa nel conteggio, e le loro proprietà esprimono in qualche modo alcune *esperienze elementari* che sottostanno alla genesi del concetto nella nostra mente: le quali vengono richiamate nell' insegnamento rivolto ai bambini, ancora sforniti di codesto concetto astratto, che appunto in tal guisa si vuole ad essi spiegare. Del resto si offrono, per questo scopo, due serie di esperienze, relative all' uso del numero come *cardinale* e *ordinale*, sebbene presto s' impari ad associare le due specie di numeri e a designarli cogli stessi simboli, offertici dalle cosiddette cifre arabiche.

§ 2. **Definizioni dei Greci.** — Ora quel procedimento di associazione e d'astrazione che la mente infantile ripete nell'acquisto dei concetti aritmetici, con più largo sviluppo si osserva nella storia della scienza, almeno per quanto ci è dato riportarci alle sue origini. Così accade di trovare che l'antica scrittura ieratica degli Egizii, adoperava segni diversi per rappresentare numeri di oggetti o numeri d'ordine dei giorni del mese (1).

(1) Cfr. F. Hoefer, *Histoire des Mathématiques* (3ª ed., Parigi, Hachette, 1886). Larghi riferimenti e notizie bibliografiche trovansi in E. Bortolotti, *Definizioni di numero* (« Periodico di Matematiche », Novembre 1922) e A. Natucci, *Il concetto di numero e le sue estensioni* (Torino, Bocca, 1923). Quest'ultimo libro contiene un vasto materiale di studio per la ricostruzione dello sviluppo storico del concetto di numero, e vi abbiamo attinto numerose informazioni.

Digitized by Google

In una maniera assai significativa il processo di sviluppo del concetto di numero si palesa allo storico della scienza greca, poichè sembra che nel primo periodo costruttivo dell'aritmetica il numero stesso non venisse distinto da una collezione di oggetti ritenuti come indivisibili. GIAMBLICO attribuisce a TALETE di Mileto (circa 600 a. C.) la definizione « numero è un sistema di unità », che si ritrova presso i Pitagorici. Ma l' unità o monade aveva originariamente in questa scuola un significato cosmologico, come elemento o principio di tutte le cose, ovvero come « punto » fisico e geometrico insieme (cfr. Articolo Primo) ; e così il numero serbava ancora qualcosa della figura geometrica in cui le sue unità (punti) si pensavano disposte. Perciò i Pitagorici parlavano di *numeri figurati* : numeri *lineari*, *triangolari*, *rettangolari*, *piramidali* ecc.

Queste teorie rispondono ad un concetto del numero che tende a liberarsi per gradi dal concreto e pure vi resta in qualche modo attaccato : il concetto astratto del numero (come quello degli enti geometrici) fu effettivamente raggiunto traverso le speculazioni d' un razionalismo metafisico, su cui PLATONE ci porge delle vedute caratteristiche. Leggiamo, per esempio, nella *Repubblica* (525 *c*) che la scienza dei numeri deve insegnarsi ai futuri reggitori dello Stato « non alla volgare maniera, occupandosene a scopo di compra e vendita come mercanti e rivenditori, ma in guisa che l' intelligenza loro possa contemplare la natura dei numeri » sì da condurli dal mondo sensibile delle cose che periscono al mondo intelligibile della verità e dell'esistenza. Infatti questo insegnamento « innalza l'anima, e la obbliga a ragionare intorno ai numeri considerati in sè, non accettando di ragionare se altri ricorra a numeri associati a corpi visibili o tangibili » (525 *d*).

Ora il tentativo di spiegare appunto il concetto astratto del numero, distinguendolo dalla pluralità di oggetti, mette capo alle definizioni d' EUCLIDE nel libro VII degli *Elementi* :

Unità è ciò per cui ogni singola cosa è detta uno.

Numero è la pluralità composta d' unità.

§ 3. **I numeri nel Rinascimento.** — Queste definizioni vedonsi tramandate pel Medio Evo traverso BOEZIO (m. 526 p. C.) e ricompaiono in LEONARDO PISANO detto il FIBONACCI (1) e in NICOLÒ TARTAGLIA (2), che esplicitamente spiega la preoccupazione onde

(1) *Liber Abaci*, 1202, p. 2.

(2) *General Trattato di Numeri e Misure*, Venezia, 1556, carte 1-2.

Digitized by Google

traggono origine. « Bisogna avertire — egli dice — che sopra al numero vi son quelle medesime due sorte di considerationi, dette sopra delle unità, cioè una secondo il Naturale e l'altra secondo il Mathematico. Il Naturale considera il detto numero sì secondo la ragione come secondo l'essere, congionto con quelle materie sensibilmente numerate.... ; ma il Mathematico poi considera il detto numero sì come una moltitudine composta de unitade mathematice, cioè astratte da ogni materia sensibile ».

Però, mentre le idee astratte sono realizzate dagli antichi in un mondo intelligibile fuori di noi (che è appunto il mondo delle idee platoniche), la filosofia moderna acquista, a grado a grado, la consapevolezza che si tratta di formazioni del nostro stesso pensiero. Così dice DESCARTES (1): «*numerus* non in ullis rebus creatis, sed tantum in abstracto, sive in genere consideratur, est modus cogitandi dumtaxat ; ut et alia omnia quae universalia vocamus.... Ita, cum videbimus duos lapides, nec ad ipsorum naturam, sed ad hoc tantum quod duo sint attendimus, formamus ideam eius numeri quem vocamus *binarium* ; cum postea duas aves, aut duas arbores videmus.... ; ut et hunc numerum eodem universali nomine binarium appellamus.... ».

Vi è qui un progresso filosofico accompagnantesi all'evoluzione storica della logica, che altrove (2) abbiamo tentato di descrivere, e che mette capo alla riforma della logica contemporanea.

§ 4. **La critica del secolo XIX.** — Col lavoro di questa riforma è congiunta la critica del concetto di numero che si svolge nel secolo XIX, e nella seconda metà di esso : in stretto rapporto collo sviluppo della Geometria non euclidea.

Infatti l'impulso dominante a siffatta critica sembra essere venuto da ciò : che, avendo dovuto riconoscere alcunchè di sperimentale, e però di non logico e non necessario, nella scienza dello spazio, la mente matematica cerca almeno di salvare sopra una base puramente logica e razionale i principî dell'Analisi, facendo capo al primo e più semplice concetto del numero intero.

Così appunto GAUSS (in una lettera a Bessel del 1829) esprimeva la differenza fra la Geometria e la Meccanica da un lato e l'Analisi dall'altro, dicendo che il numero è un puro prodotto della

(1) *Principia philosophiae naturalis*, nn. 58-59.
(2) *Per la Storia della Logica*, Bologna, Zanichelli, 1922.

Digitized by Google

nostra mente, laddove spazio e tempo hanno anche fuori del nostro spirito una realtà, di cui *a priori* non possiamo segnare le leggi. E da questo pensiero procede quell'*aritmetizzazione delle Matematiche*, che caratterizza la scuola di WEIERSTRASS (1) e di KRONECKER (2), riducente il significato di ogni proposizione matematica a pure relazioni fra numeri naturali. Alla quale si collega in gran parte l'esame più approfondito degli assiomi che occorrono nella costruzione di tali numeri.

Vero è che la ricerca critica intorno ai principî dell'Aritmetica è lungi dall'accordarsi sopra un comune fondamento filosofico; chè infatti diverse vedute vedonsi accolte da diversi pensatori: la veduta di KANT, seguìta da W. HAMILTON (3), che riattacca il numero all'intuizione *a priori* del tempo, ordine della sensibilità interna; e quella che HELMHOLTZ riprende dagli empiristi inglesi, per cui il numero ha un significato sperimentale (sebbene, anche per HELMHOLTZ, il tempo entri particolarmente nella sua formazione psicologica); infine la veduta, più direttamente connessa al menzionato indirizzo aritmetico della scuola di Berlino, che viene professata da FREGE (4) e DEDEKIND (5), i quali considerano semplicemente il concetto di numero come pertinente alla logica.

Ma infine il dissenso filosofico che qui si manifesta, e che si rinnova anche oggi fra matematici e pensatori che pure si accostano nell'indirizzo delle loro analisi, non toglie l'accordo intorno al senso della critica matematica, volta a spiegare il concetto del numero. « Se si considera attentamente ciò che facciamo quando *numeriamo dei gruppi* e *contiamo* delle cose — dice DEDEKIND — si è condotti a por mente alla facoltà dello spirito di riferire oggetti ad oggetti, o di far corrispondere un oggetto ad un oggetto, senza la quale non è possibile in genere nessun pensiero ».

E tutta la critica recente del concetto di numero si appunta precisamente sullo studio degli ordini e delle corrispondenze che si possono stabilire entro e fra classi o insiemi di oggetti: studio

(1) Cfr. l'esposizione di E. KOSSAK, *Die Elemente der Arithmetik*, Berlino, 1872.

(2) *Ueber den Zahlenbegriff*, Lipsia, 1887.

(3) *Zahlen und Messen*, Lipsia, 1887.

(4) *Grundlagen der Arithmetik*, Breslavia, 1884.

(5) *Was sind und was sollen die Zahlen*, Braunschweig, 1887.

Digitized by Google

assorto a costituire un ramo generalissimo della scienza matematica, traverso l'opera di GIORGIO CANTOR (1).

Il matematico può, almeno in certo grado, prescindere dalle questioni propriamente filosofiche che qui si riattaccano: se, e fino a che punto e in qual senso, l'idea di un oggetto in generale e della sua identificazione e discriminazione da altri oggetti, resulti da esperimenti; e se ancora da esperimenti fisici e psicologici rilevi la corrispondenza che poniamo fra oggetti e oggetti, in cui altri vede piuttosto la consapevolezza delle facoltà associative dello stesso pensiero. Sebbene accada pure di scorgere un qualche influsso del presupposto filosofico sull'indirizzo della critica matematica, per esempio nella preferenza che alcuni critici danno al numero ordinale sul cardinale, perchè quello, a differenza di questo, sembra riflettere l'idea del tempo, e perchè venga ritenuto come primo nell'acquisto psicologico.

§ 5. **Indirizzo assiomatico.** — Il proposito di prescindere da ogni questione d'origine e di significato nella trattazione matematica dei numeri, ha trovato la sua espressione nella dottrina *puramente formale*, che viene enunciata, per es. da HEINE (1872) (2), dicendo che « i numeri sono soltanto *determinati segni*, e le regole delle operazioni che si fanno sopra di essi sono regole con cui due numeri legati dai simboli operativi possono scambiarsi ».

Ma una critica logica approfondita ha rilevato che la compatibilità di tali regole postula infine l'esistenza logica di oggetti corrispondenti ai segni di cui si definiscono i rapporti, e così la critica formale (pur conservando la predilezione del « signicismo ») viene a risolversi in un *indirizzo assiomatico* come quello che caratterizza la scuola di GIUSEPPE PEANO: qui la critica dei fondamenti dell'Aritmetica (similmente alla critica della Geometria)

(1) Le memorie principali di questi sulla teoria degli insiemi, si trovano nel « Journal für Mathematik » (di CRELLE), 77, 84 (1874-1877), poi nei « Math. Annalen », 15, 17, 20, 21, 22, 23, degli anni 1879-1884, e negli « Acta Mathematica » a cominciare dal tomo 2 (1883) ove appaiono traduzioni francesi degli articoli precedenti. La critica del concetto del numero cardinale ordinario è svolta in ispecie in « Math. Annalen », 49 (1895). Sui numeri ordinali e sulla introduzione dei transfiniti, dopo le memorie citate del 1883 si veda: « Zur Lehre von Transfiniten », Halle (1890) e « Math. Annalen », 49 (1897).

(2) « Journal für Mathematik », 74, 172.

Digitized by Google

si riduce ad un'analisi semplificatrice, che mette capo a taluni *concetti primitivi non definiti*, di cui vengono postulati i rapporti elementari.

L'analisi istituita a tale scopo dal PEANO (1) riproduce sostanzialmente nella sua parte positiva, il metodo di trattazione di H. GRASSMANN (2), di S. PEIRCE (3) e di R. DEDEKIND (l. c.): dove, posta la *successione dei numeri ordinali*

$$1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots.$$

si assume come *operazione elementare* dell'Aritmetica il passaggio dal numero n al successivo $n + 1$, e si porgono quindi *definizioni induttive* dell'addizione e della moltiplicazione; sicchè per es. l'addizione viene definita in base all'assioma

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1.$$

Ora questo sistema grassmanniano, che si dimostra proprio a raccogliere e ordinare logicamente le proprietà algoritmiche dei numeri, in una maniera semplice ed *economica*, viene assunto senz'altro da PEANO, come una risposta al problema dei principî dell'Aritmetica. Per il Nostro non si ha da spiegare o discutere sul significato dei numeri, bensì, ritenendo come concetti primi non definiti « Numero », « Successivo di un numero », « 1 » o « 0 », occorre soltanto postulare i semplici rapporti logici di tali concetti (cioè gli assiomi aritmetici), che ne porgono la *definizione implicita*. Come si vede l'indirizzo assiomatico della scuola di PEANO, assimila la fondazione dell'Aritmetica alla fondazione della Geometria secondo il criterio di MORITZ PASCH (Cfr. Articolo Primo, § 12).

Ma tale assimilazione ha qualcosa d'urtante. Infatti il criterio di PASCH si basa sul presupposto che i concetti geometrici primitivi (punto, retta....) designino oggetti o classi d'oggetti empiricamente definiti, e — comunque si voglia criticare questo assunto filosofico — l'interpretazione dei postulati geometrici contiene l'invito ad una *visione*, sia pure *intellettuale* o *immaginativa*, dei rapporti (di appartenenza ecc.) che con essi si esprimono. Ma che cosa siamo invitati a vedere, colla nostra immaginazione, dietro

(1) *Arithmetices Principia*, Torino, 1889.
(2) *Lehrbuch der Arithmetik*, Berlino, 1861.
(3) « American Journal », 1878.

Digitized by Google

il simbolo non definito del numero ? Ogni tentativo in questo senso ci porta a realizzare, per così dire in un mondo intelligibile, non i numeri, bensì oggetti o classi d'oggetti di cui i numeri esprimono dei rapporti logici. E d'altronde non si riesce a comprendere che cosa, di essenzialmente nuovo o diverso, i concetti aritmetici aggiungano alle semplici nozioni logiche, usate nella nostra analisi.

Questa critica si è affacciata nell'ambito stesso di coloro che adottano i simboli della logica matematica di PEANO, per opera di B. RUSSELL (1), il quale rifiuta appunto di distinguere i concetti primitivi dell'Aritmetica dai concetti generali della logica, e ritorna così — traverso una nuova elaborazione sistematica — alla posizione di CANTOR e di FREGE, e alla teoria dei numeri cardinali (2).

§ 6. **Che cos'è logico?** — Ma la tesi che riconduce l' « aritmetico » al « logico », suscita la domanda di definire ciò che è logico. Alla quale si dànno tre risposte, che s'accordano con tre diverse posizioni filosofiche :

1) Secondo la veduta degli empiristi inglesi (STUART MILL) la logica non è che una conoscenza di *fatti generalissimi* che, al pari di ogni altra nozione, deriva dall'esperienza : i « fatti » a cui si accenna, esprimenti gli *assiomi* logici, sarebbero più precisamente le « proprietà degl'insiemi o aggregati d'oggetti ».

2) Per KANT la logica esprime un elemento formale, che tiene alla *mente* sperimentatrice e che — pure rivelandosi nello sperimentare — è tuttavia indipendente dall'oggetto della stessa esperienza.

3) Infine la tesi neo-aristotelica — che si svolge da LEIBNIZ, traverso BOLZANO e CANTOR, fino a RUSSELL — pone i rapporti logici come *relazioni d'un mondo intelligibile* : il mondo degli « enti » o dei « possibili », che avrebbe — fuori della nostra mente — una sua propria realtà, cui si subordina la realtà delle cose « esistenti ».

(1) *The Principles of Mathematics*, 1893. Cfr. RUSSELL e WHITEHEAD, *Principia mathematica*, Cambridge, 1910-13.

(2) Tuttavia la tendenza puramente formale e simbolica si esprime ancora in nuovi lavori, per esempio in quelli di DAVID HILBERT, *Neue Begründung der Mathematik*, nelle « Abbandlungen del Seminario d' Amburgo » (1872) e *Die logische Grundlagen der Mathematik*, in « Math. Annaler », 88 (1822). E basti citare il motto caratteristico dell'Autore: *In principio era il segno.*

Digitized by Google

Altrove (1) abbiamo spiegato come quest'ultima tesi *realistica* si connetta alla veduta *simbolica* della logica, che tuttavia in alcuni cultori (per es. in BOOLE e forse ancora in PEANO) appare legata ad una concezione empirica. E all'analisi simbolica della logica, e alla veduta *statica* che essa implica del pensiero, abbiamo contrapposto, da parte nostra, un'*analisi dinamica*, che mette in evidenza le *operazioni elementari* di codesto processo psicologico (2). Infine un esame approfondito del problema, ci ha condotti a conciliare l'empirismo colla concezione kantiana, in una *tesi critica*, che — riconoscendo i due aspetti, subiettivo e obiettivo della logica — postula la sussistenza di fatti generalissimi, come condizione d'accordo della mente colla realtà, che rende possibile l'applicazione della logica.

Lo sviluppo dei principî dell'Aritmetica, che qui offriamo al lettore (perfezionando il lavoro contenuto nella 1ª edizione del 1912), può ritenersi come un'illustrazione della tesi critica sopra accennata. Ma questo sviluppo sale dal concreto all'astratto, e dalle esperienze alle leggi mentali che in esse si discoprono, conformemente all'ordine dell'evoluzione storica delle idee. Così, prendendo le mosse dall'analisi del significato empirico dei numeri, riusciremo a chiarire meglio le esigenze d'una costruzione razionale: la quale basa tutta l'Aritmetica sui *concetti puramente logici* (di classe, ordine, corrispondenza) prodotti dalle operazioni associative del pensiero sopra oggetti dati o supposti, e sugli *assiomi* che esprimono le proprietà fondamentali di codeste operazioni.

II. — IL SIGNIFICATO EMPIRICO DEI NUMERI.

§ 7. Numeri cardinali. — Le esperienze da cui nasce il concetto del numero sono relative a *gruppi* o *classi* di *oggetti* (*elementi*) la cui natura è arbitraria; il solo requisito è che si tratti di oggetti individuabili, cioè che non variino o sfumino o si confondano fra loro durante l'esperienza. Ai bambini si offrono a tal uopo vari esempi: dita, noci, mele, sassi, lapis, uomini, ecc.

D'altronde vi sono, come già accennammo, due serie di esperienze elementari che corrispondono all'uso diverso dei *numeri cardinali* e dei *numeri ordinali*.

(1) *Per la Storia della Logica*, 1922.
(2) *Problemi della Scienza*, 1906, cap. III.

Digitized by Google

Per definire i numeri cardinali si parte dalle esperienze seguenti:

Si abbiano due classi di oggetti dati (intendo dati materialmente davanti agli occhi):

$$(a) = (a_1 a_2 \ldots.)$$
$$(b) = (b_1 b_2 \ldots.).$$

Cerchiamo di *associare* ad ogni elemento della prima classe *un* elemento della seconda, riunendo materialmente gli elementi associati o ponendo un contrassegno che valga a riunirli idealmente nella nostra mente; se l'associazione suddetta si può porre in modo che viceversa ogni oggetto della seconda classe risulti così associato ad *uno* della prima, senza eccezione, si ha fra gli elementi delle due classi (o, come si dice anche, fra le due classi) una *corrispondenza biunivoca*; diremo allora che le due classi (a), (b) sono *equivalenti* e scriveremo

$$(a) = (b).$$

L'equivalenza fra classi di oggetti soddisfa alle tre proprietà fondamentali che, con De Morgan e Vailati, vengono designate come segue:

1) *Proprietà riflessiva*:

$$(a) = (a).$$

Infatti si può associare ad ogni elemento di (a) se stesso.

2) *Proprietà simmetrica*:

$$(a) = (b)$$
$$(b) = (a).$$

Infatti l'associazione di due elementi a, b, è un'operazione mentale simmetrica, cioè indipendente dall'ordine in cui si considerano i due elementi associati.

3) *Proprietà transitiva*:

se

$$(a) = (b)$$

e

$$(b) = (c),$$

anche

$$(a) = (c).$$

Digitized by Google

Infatti se un elemento a si pensa associato ad un b, e questo b ad un c, restano associati nel pensiero a e c. (La corrispondenza così ottenuta fra (a) e (c) dicesi *prodotto* di quelle poste fra (a) e (b) e fra (b) e (c)).

A queste proprietà si aggiunge la seguente:

4) *Se una classe* (b) *contiene tutti gli elementi di* (a) *e qualche altro elemento, le due classi* (a) *e* (b) *non sono equivalenti.*

Si abbiano le classi

$$(a) = (a_1\, a_2 \ldots.)$$
$$(b) = (h\, a_1\, a_2 \ldots.),$$

dove si suppone per semplicità che la classe (b) contenga un solo elemento oltre gli a.

Se fosse

$$(a) = (b),$$

si avrebbe fra le due classi una corrispondenza biunivoca. In questa ad h corrisponderebbe un certo elemento a_i di (a).

Togliamo h ed a_i dalle due classi rispettivamente; avremo

$$(a_1\, a_2 \ldots.\, a_{i-1}\, a_{i+1} \ldots.) = (a_1\, a_2 \ldots.\, a_{i-1}, a_i, a_{i+1} \ldots.)$$

Ora fra queste due classi intercede una corrispondenza, in cui ad a_i corrisponde un certo elemento a_s; tolti a_i, a_s dalle due classi, rimangono classi equivalenti, e così via di seguito.

Ma, seguitando a togliere successivamente gli oggetti di una classe, *materialmente dati* (o *effettivamente pensati*), la classe si esaurisce (*principio d'induzione matematica*, cfr. § 16); si arriva pertanto a ridursi al caso di una classe composta d'un solo oggetto a_r; e si trova che questa dovrebbe essere equivalente ad una classe che contiene anche un altro elemento:

$$(a_r) = (a_r a_t).$$

Questa conclusione è evidentemente assurda, perchè se si fa corrispondere l'elemento a_r della prima classe all'uno o all'altro elemento della seconda, rimane sempre in questa seconda classe un elemento a cui non viene associato alcun elemento della prima.

Il ragionamento riesce ugualmente (*a fortiori*) se la classe (b) contiene più di un elemento oltre a_r.

Digitized by Google

La proprietà 4) si può enunciare in altro modo, ponendo la seguente

DEFINIZIONE. — Se (a) e (b) sono due classi e la classe (a) è equivalente ad una classe contenuta in (b) e non coincidente con (b), cioè ad una *parte propria* di (b), la classe (b) si dice *prevalente* ad (a), e si scrive:

$$(b) > (a).$$

Allora la proprietà 4) si può enunciare dicendo:

4') *Se di due classi* (a), (b), *l'una è prevalente all'altra, le due classi non sono equivalenti.*

O più brevemente (tenendo presente la prop. 3):

Una classe non può essere equivalente ad una sua parte propria.

Confrontiamo ora due classi qualunque di oggetti materialmente dati. Si ha:

5) *Date due classi* (a), (b), *o esse sono equivalenti o una di esse è prevalente all'altra* (cioè questa è equivalente ad una parte di quella).

Tale proprietà si dimostra in base allo stesso principio d'induzione adoperato per stabilire la 4). Togliamo da ciascuna delle due classi (a), (b) un elemento; per es.:

$$a_1, \quad b_1$$

e associamo idealmente questi elementi; la questione è ridotta al confronto delle classi residue. Ma successivamente così operando si giunge ad esaurire una delle due classi, per es. (a), mentre l'altra (b) può essere contemporaneamente esaurita o non ancora esaurita. Risulta quindi che

$$(a) = (b) \text{ oppure } (b) > (a).$$

Infine notiamo che:

6) *Se di tre classi* (a), (b), (c)

$$(a) > (b) \text{ e } (b) > (c)$$

anche

$$(a) > (c);$$

se

$$(a) > (b) \quad \text{e} \quad (b) = (c)$$

anche

$$(a) > (c).$$

Digitized by Google

Questa proprietà risulta immediatamente dalla definizione della prevalenza.

7) Corollario. — *Se di due classi* (a) *e* (b):

$$(a) > (b),$$

non può essere

$$(b) > (a).$$

Invero se così fosse risulterebbe

$$(a) > (a).$$

contro la prop. 4) (cfr. la 1).

Osservazione. — In altri termini *la relazione di prevalenza fra classi soddisfa alla proprietà transitiva* (6) *ma non alle proprietà simmetrica e riflessiva.*

Le precedenti proposizioni conducono a classificare o distribuire le classi o gruppi d'oggetti in *classi di classi* per modo che:

a) *Insieme ad una classe* c *appartengono alla medesima classe di classi le sue equivalenti.*

b) *Insieme a* c *non può trovarsi nella medesima classe di classi una parte di* c.

In base a questa distribuzione si può costruire un concetto astratto, che vale come contrassegno delle classi (equivalenti) appartenenti ad una medesima classe di classi, e corrisponde ad una qualsiasi delle classi suddette pensata come sostituibile (*uguale*) ad un'altra qualunque di esse. Questo concetto è il *numero* (*cardinale*) *degli oggetti d'una classe.* L'equivalenza delle classi (a), (b) si trasforma quindi nell'uguaglianza: numero degli elementi di (a) = numero degli elementi di (b); il significato di questa uguaglianza consiste appunto nell'indicare l'astrazione anzidetta il cui resultato è l'identità del concetto astratto = numero cardinale corrispondente alla classe di classi $\{(a), (b)....\}$.

§ 8. **Astrazione e uguaglianza.** — La definizione data del numero è una *definizione per astrazione*: si definisce il «numero degli oggetti d'una classe» stabilendo quand'è che i numeri corrispondenti a due classi sono «eguali».

Questo modo di definizione s'incontra già nel libro 5° degli

Digitized by Google

Elementi d' EUCLIDE, dove appunto non si dice ciò che sia il rapporto di due grandezze, ma soltanto che cosa si deve intendere per « rapporti eguali ».

Ma per chiarire tali definizioni conviene esaminare che cosa significhi l'operazione logica di astrazione, su cui esso si basa.

Data una classe di oggetti, la mente può sempre costruire il *concetto astratto dell'elemento della classe* : per es. dalla classe (Tizio, Caio....) si ricava il concetto astratto di uomo, da una classe di rette parallele si ricava il concetto di direzione ecc. La costruzione del concetto astratto dell'elemento di una classe, ha questo significato psicologico ; è la finzione di un *quid comune* agli elementi della classe, ciascun dei quali viene immaginato per così dire come somma del *quid* comune e di un *quid* diverso che ne caratterizza l'individualità. Così ad es. si concepisce un ente astratto « l'uomo » da cui Tizio, Caio ecc. si ottengono coll'aggiunta di determinati caratteri, una direzione (astrattamente determinata) comune a tutte le rette parallele ecc.

Come abbiamo avvertito nel cenno storico introduttivo (§ 2), gli antichi si rappresentavano i concetti astratti come enti reali posti fuori di noi in un mondo intelligibile (*idee platoniche*), e a questa rappresentazione si legano le celebri controversie medioevali fra *realisti* e *nominalisti*.

Ma, riconosciuto il carattere mentale dell'astrarre, conviene tuttavia determinare il significato logico proprio di questa operazione, che i logici matematici aventi adottato l' ideografia di PEANO confondono colla riunione di più oggetti in una classe. Invero, dal riunire più oggetti a, b, c.... sorgono *due enti logici diversi* : la *classe*, a e b e c.... e il *concetto astratto*, a o b o c.... che, in qualche modo, si può ritenere come resultato dell'operazione inversa per cui dalla classe si ritorna a uno degli elementi che la costituiscono.

Rispetto a quest'operazione, si spiega il significato dell'*uguaglianza*. L'uguaglianza di due oggetti non ha alcun significato di per sè ma solo per riguardo ad una classe in cui essi si trovino riuniti, ed è sempre *relativa al concetto astratto della classe in cui vengono considerati* ; per es. « segmenti uguali » sono quelli che appartengono ad un medesimo sistema di segmenti generato dalle possibili posizioni di un segmento (rigido) che si muove liberamente nello spazio. Il significato psicologico dell'uguaglianza è la finzione di ritrovare lo stesso *quid* identico negli elementi della

Digitized by Google

classe che abbiamo detto costituire appunto « l'astratto »; in altre parole ogni eguaglianza si concepisce come « somma di un'identità e di una diversità ».

All'uguaglianza spettano le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, che esprimono qui le proprietà fondamentali del processo logico d'associazione e astrazione. Viceversa ogni relazione fra oggetti qualsiansi che goda delle tre proprietà suddette può considerarsi come un'uguaglianza, perchè essa porge un modo determinato di classificazione degli oggetti dati, ove si pongono in una medesima classe gli oggetti legati dalla relazione indicata.

Si aggiunga che, secondo l'analisi di A. Padoa (che si può ritenere come illustrativa del pensiero di Leibniz), in luogo di considerare l'uguaglianza come una relazione fra due oggetti a, b di una classe rispetto all'astratto, si può considerare l'astratto funzione di a come uguale all'astratto funzione di b; ad esempio invece di dire che due segmenti sono uguali, si può dire che la lunghezza di un segmento è uguale alla lunghezza dell'altro. Questo giudizio riveste allora la forma di una identità, ma il suo valore non tautologico si desume dalle considerazioni che seguono.

Ogni concetto astratto corrisponde ad una classe di oggetti. Ciò che i logici designano come *estensione del concetto* è l'insieme degli oggetti che compongono la classe suddetta; così due concetti aventi la medesima estensione contengono gli stessi oggetti. Accanto all'estensione i logici considerano la *comprensione* del concetto, cioè l'insieme delle proprietà (per così dire esterne) che caratterizzano la classe di oggetti corrispondente. Ora due serie diverse di proprietà possono definire la medesima classe di oggetti; così per es. la classe dei triangoli equilateri coincide con quella dei triangoli equiangoli. Affermare l'uguaglianza di due concetti astratti significa in generale riconoscere che due classi definite mediante proprietà diverse, cioè differenti dal punto di vista della comprensione, sono identiche dal punto di vista dell'estensione, ossia contengono gli stessi elementi.

§ 9. **Nota critica.** — Alle cose dette innanzi, che mirano a spiegare nei più brevi termini una questione assai delicata, stimiamo opportuno di aggiungere qualche sviluppo critico.

Realismo e *nominalismo* non esprimono soltanto due *dottrine* filosofiche, ma anche due *tendenze* opposte della mente umana:

Digitized by Google

1) La tendenza, che si può caratterizzare come *realistica* segue di preferenza il cammino deduttivo, dal generale al particolare; e però si attacca alla *logica della comprensione*, ritenendo il *concetto* come *somma delle proprietà che lo definiscono*, o come interferenza di concetti più generali ed astratti (generi, specie). Qui dunque l'astratto, il *quid* comune agli elementi d'una classe, è un presupposto dell'esistenza stessa della classe, i cui elementi verranno ulteriormente *distinti* e individuati in rapporto ad esso, coll'aggiunta di differenze specifiche.

2) Invece la tendenza *nominalistica* va per la via induttiva, dal particolare al generale, e però si attacca alla *logica dell'estensione*. Qui il concetto è pensato come una *classe d'individui*, rispetto a cui questi vengono eguagliati. Pertanto i realisti assumono come *prima logica* i concetti *universali*, e la difficoltà è per essi nel giungere agli *ultima*, che sono gl'individui: in questo senso domandavano gli scolastici: «dove trovare un *principium individuationis*?». All'opposto nella seconda via il *primum* che si suppone dato è l'*individuo*, e sono gli universali che diventano l'ultimo irraggiungibile (*flatus vocis*).

Ora, lasciando da parte la questione filosofica se veramente nell'ordine dei concetti possa darsi un *primum*, sia universale sia individuale, non si può negare almeno il significato relativo dei due procedimenti del pensiero, ascendente e discendente o induttivo e deduttivo, che dir si vogliano. E allora la questione in cui ci siamo imbattuti si riduce a questa: se il concetto abbia il medesimo significato per la logica comprensiva e per l'estensiva.

Il linguaggio comune segna qui una differenza: l'umanità e l'uomo, l'Italia e l'italiano, l'esercito e il soldato, sono coppie di nomi che rispondono ciascuna ad una classe e al corrispondente astratto, cioè — in qualche modo — allo stesso concetto ritenuto una volta per la sua estensione e l'altra per la sua comprensione.

L'illegittimità di confondere i due significati risulta da ben noti sofismi che attrassero già l'attenzione degli Scolastici. Per esempio:

Pietro e Paolo sono apostoli;
Gli apostoli sono dodici;
Dunque Pietro e Paolo sono dodici.

È chiaro che la fallacia sta qui nell'ambiguità del termine medio, poichè la prima proposizione asserisce che Pietro e Paolo sono membri della classe degli apostoli, mentre la seconda esprime

Digitized by Google

la proprietà di questa classe, di essere una dozzina: si confonde dunque il concetto astratto dell'« apostolo » colla « classe degli apostoli ».

Tuttavia questa distinzione fondamentale della classe e dell'astratto è stata disconosciuta nella costruzione del sistema dell'ideografia logico-matematica (1), e PEANO — fatto accorto della difficoltà contenuta nel citato sofisma — ha preferito risolverla aggiungendo ai simboli dei suoi predecessori un nuovo segno per la copula « è » « è un », di cui distingueva in tal guisa — sulle tracce degli Scolastici — un *sensus divisi* e un *sensus compositi*.

Ma la negletta distinzione si riaffaccia necessariamente nelle « definizioni per astrazione », che perciò debbono offrire ai logici matematici un punto incomprensibile, proprio là dove il loro linguaggio introduce un'ambiguità che non appartiene al linguaggio comune.

Così questo modo di definizione, accolto in un primo tempo da PEANO, è andato incontro alle critiche della scuola.

Ora ecco come la difficoltà appare nella definizione del numero. GIORGIO CANTOR (2) dice che il numero cardinale si ottiene dalla classe, « per mezzo della nostra attiva facoltà di pensare », facendo astrazione dalla natura e dall'ordine dei suoi elementi, di guisa che diverse classi hanno ugual numero (o potenza) se sono equivalenti.

BERTRAND RUSSELL (3) critica questo modo di definizione, avvertendo che esso va incontro a un difetto formale assolutamente fatale, perchè non si può mostrare che esiste un solo oggetto soddisfacente alla definizione. Per rimediarvi egli identifica il numero degli oggetti d'una classe C colla « classe di tutte le classi » equivalenti a C.

C. BURALI-FORTI (4) si è accorto in seguito degli inconvenienti di questo sistema e che occorre introdurre in luogo della classe

(1) Forse c'è qui un motivo storico: PEANO, e più ancora RUSSELL, hanno sovrapposto una veduta realistica alla costruzione d'un simbolismo ispirato a vedute nominalistiche, come quello di BOOLE. Ora i nostri logici e matematici non sanno dove allogare il « concetto astratto » perchè hanno già pensato la « classe » come « concetto astratto ».

(2) « Math. Annalen », 46 (1845).

(3) « Principles of Mathematics », Cambridge, 1903, p. 114.

(4) *Gli enti astratti definiti come enti relativi ad un campo di nozioni*, in « Rendic. Lincei », 1912. « Logica matematica », 2ª ed., p. 350. – Cfr. la polemica ENRIQUES-BURALI-FORTI, in « Periodico di Matematiche », 1922.

Digitized by Google

delle C una funzione $f(C)$; tuttavia non riesce a determinarla, poichè se per C e C' equivalenti si ha $f(C) = f(C')$, si ha anche $\varphi\{f(C)\} = \varphi\{f(C')\}$, dove si designi con φ una funzione arbitraria. Ma questa indeterminazione, che troppo facilmente viene illustrata da esempi, prova soltanto che vi è errore nel modo di porre il problema. E la soluzione sta proprio in quella « facoltà attiva del nostro pensiero » invocata dal CANTOR, che il BURALI-FORTI prende a dileggio.

Ove si chieda ad un logico matematico come definisce la « classe » formata da più oggetti a, b, c..., questi non può rispondere altro se non che il concetto di classe ha un significato logico primitivo: che resulta poi da un'operazione fondamentale del pensiero, — il « riunire » — espresso nel linguaggio comune dalla particella congiuntiva « e ». Così, ove altri, in luogo di assumere la classe (a, b, c....) come il concetto primitivamente definito

$$a \text{ e } b \text{ e } c....$$

si avvisasse di considerarla una funzione da determinare

$$f(a, b, c...),$$

andrebbe incontro a scoprire che f non può essere in alcun modo determinata.

Il medesimo si deve dire per il « concetto astratto » che formiamo nella nostra mente pensando ad un individuo fra i dati a, b, c..., come sostituibile da uno qualunque degli altri (suoi eguali), e che designamo con la particella disgiuntiva « o »:

$$a \text{ o } b \text{ o } c....$$

Così per es. « il coniuge » è definito correttamente dicendo « il marito o la moglie », tantochè questa definizione si può sostituire al termine definito in ogni disposizione d'un codice che abbia « il coniuge » come soggetto.

E anche dell'astratto si può dire che è un concetto logico primitivo che ha un senso determinato soltanto per riguardo alla *astrazione*, proprio come la « classe » rispetto alla *riunione*.

Questa critica delle definizioni per astrazione è contenuta nell'analisi della *logica*, come processo operativo del pensiero, che ENRIQUES ha svolto fino dal 1906 nei « Problemi della Scienza » (cap. III) e che ha poi ripreso in altri lavori successivi (1). Ma è

(1) Per es. *Die Probleme der Logik*, in « Encyclopädie der Phil. Wissenschaften », edita da WINDELBAND e RUGE, Tubinga, 1912.

Digitized by Google

singolare che il significato di essa sia sfuggito a menti abitualmente sottili e che nessuno di coloro che non ne accettano le vedute si sia sentito di scendere a discuterle sul loro proprio terreno.

§ 10. **Numeri ordinali.** — Per definire i numeri ordinali si parte dalle esperienze che seguono:

Una classe di oggetti (materialmente) dati si può *ordinare* (mediante un'opportuna disposizione nello spazio, o mediante contrassegni o semplicemente nel pensiero), pensando un elemento di essa come *primo* e gli altri elementi, come dati *successivamente uno dopo l'altro*; si ottiene così una *classe ordinata*, *serie* o *successione*, nella quale:

1) dati due elementi qualunque, uno di essi *succede* all'altro e questo *precede* quello;

2) se l'elemento c succede a b e b succede ad a, anche c succede ad a;

3) vi è un *primo* elemento, che precede tutti gli altri, e un *ultimo* elemento, che segue a tutti;

4) ogni elemento a, ad eccezione dell'ultimo, ha *un successivo immediato* b (diguisachè non vi è alcun elemento che succeda ad a e preceda b);

5) ogni elemento, ad eccezione del primo, ha *un precedente immediato* (di cui è *il* successivo).

Ciò posto si considerino due serie o classi ordinate:

$$(a) \equiv (a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots)$$
$$(b) \equiv (b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots).$$

Cerchiamo di stabilire fra di esse una *corrispondenza biunivoca ordinata*, per modo che:

1) al primo elemento di (a) corrisponda il primo di (b);

2) se due elementi a, b si corrispondono, si corrispondano anche i loro successivi.

In forza di queste condizioni, ad a_2, successivo di a_1 in (a), dovrà corrispondere b_2 successivo di b_1 in (b), e quindi ad a_3, b_3 ecc. Così procedendo si otterrà effettivamente una corrispondenza ordinata (*completa*) fra (a) e (b) se le due classi sono equivalenti; altrimenti, se per es. $(b) > (a)$, si porrà una corrispondenza ordinata fra (a) ed una parte di (b), restando senza corrispondenti gli elementi che succedono in (b) al corrispondente dell'ultimo di (a);

Digitized by Google

si può anche dire che si ha in ogni caso una corrispondenza ordinata *similare* fra le due serie (a) e (b). E conviene avvertire che l'esistenza e la determinatezza di questa si basa sul principio d'induzione, mercè cui si è introdotto nel § 7 il carattere *finito* delle classi d'oggetti materialmente dati.

Si considerino ora tre serie qualunque

$$(a) = (a_1 a_2 \dots a_n \dots)$$
$$(b) = (b_1 b_2 \dots b_n \dots)$$
$$(c) = (c_1 c_2 \dots c_n \dots),$$

ed essendo a_n un elemento qualsiasi di (a), si supponga soltanto che ciascuna delle classi considerate sia prevalente alla parte $(a_1 a_2 \dots a_n)$.

In tale ipotesi:

si può porre una determinata corrispondenza ordinata (similare) fra le serie (a) e (b), ed in questa all'elemento a_n corrisponde un determinato elemento b_n di (b);

si può porre analogamente una determinata corrispondenza ordinata (similare) fra le serie (a) e (c), ed in questa ad a_n corrisponde un determinato elemento c_n.

Ebbene: se si confrontano le serie (b), (c) ponendo tra di esse la corrispondenza ordinata, in questa all'elemento b_n corrisponde l'elemento c_n.

In forza di questa proprietà si può porre la seguente

Definizione. — *Elementi di due serie che si corrispondono in una corrispondenza ordinata si dicono di* **ugual** *posto.*

Infatti questa relazione gode delle proprietà di un'uguaglianza (riflessiva, simmetrica e transitiva).

Diventa quindi possibile di classificare gli elementi di quante si vogliano serie ponendo in una medesima classe tutti gli elementi di ugual posto (e arrestando la classificazione alla serie minima). Nel quadro seguente si vedono appunto costruite le classi $k_1 k_2 \dots k_n$ i cui elementi (disposti sopra una verticale) appartengono alle serie (a), (b), (c)..., ed occupano in esse ugual posto:

k_1	k_2		k_n	
$(a) = a_1$	a_2	....	a_n	....
$(b) = b_1$	b_2	....	b_n	....
$(c) = c_1$	c_2	....	c_n	....
.....	..	..	..	..

Digitized by Google

Il concetto astratto dell'elemento della classe k_n *si dice numero d'ordine dell'elemento* a_n *nella serie* (a), *ed ugualmente di* b_n *in* (b) *ecc.*

Questo numero (*ordinale*) contrassegna il posto di a_n e di tutti gli elementi di ugual posto nelle serie considerate.

§ 11. Confronto fra numeri cardinali e numeri ordinali. — *Ad ogni numero ordinale* (n), designante il posto di a_n nelle serie

$$a_1 a_2 \dots a_n \dots,$$

corrisponde un numero cardinale, cioè quello che designa il numero degli oggetti della classe

$$(a_1 a_2 \dots a_n).$$

Viceversa si riprenda la classificazione delle classi in classi di classi equivalenti stabilita al § 7. In forza delle proprietà (1.... 7), queste classi di classi $(k_1 k_2 \dots k_n \dots)$ si trovano disposte in una serie ordinata, come indica il seguente quadro:

k_1	k_2		k_n	
(a_1)	$(a_1 a_2)$	....	$(a_1 a_2 \dots a_n)$	....
(b_1)	$(b_1 b_2)$	....	$(b_1 b_2 \dots b_n)$	....
(c_1)	$(c_1 c_2)$	....	$(c_1 c_2 \dots c_n)$	....
..	.....	..	.....	..

Pertanto al *numero cardinale* n, che designa il numero degli oggetti di ciascuna classe di k_n, *corrisponde un numero ordinale*, cioè quello che designa il posto di k_n nella serie

$$k_1 k_2 \dots k_n \dots$$

Ed è chiaro che il principio d'induzione, adoperato al § 7, porta che tutte le classi di oggetti sensibilmente dati si troveranno in questa classificazione. Pertanto al *numero cardinale* n, che designa il numero degli oggetti di ciascuna classe di k_n, *corrisponde un numero ordinale*, cioè quello che designa il posto di k_n nella serie

$$k_1 k_2 \dots k_n \dots$$

L'univocità della corrispondenza resulta qui dalla proprietà 4 o 4′: essa esprime il cosiddetto *principio d'invarianza del numero di* Schröder (cfr. § 15).

Digitized by Google

Ora, riferendoci alla corrispondenza biunivoca fra numeri cardinali e ordinali stabilita come si è detto, immaginiamo di associare ad ogni numero cardinale (n_c) il suo corrispondente ordinale (n_o): costruiamo così le classi:

$$(1_c 1_o),\ (2_c 2_o) \ldots,\ (n_c n_o) \ldots$$

Dalla classe ($n_c n_o$) *possiamo ottenere per astrazione il concetto del numero astratto* n, simbolo comune di un numero cardinale e del corrispondente ordinale (1).

NOTA. — Nella pratica s'impara difatti a operare sopra numeri astratti (1, 2, 3,....) ciascuno dei quali riceve poi il significato di numero cardinale e concretamente di numero degli oggetti di una certa classe, oppure di numero ordinale e precisamente di numero d'ordine di un elemento di una certa serie.

Dal doppio uso dei numeri cardinali e ordinali è nata alla fine del secolo scorso la questione largamente dibattuta nel pubblico «*se il secolo ventesimo cominci col 1° gennaio 1900 o col 1° gennaio 1901*».

La questione consiste in questo: il numero (1900 o 1901) che si scrive nella data (riferendosi alla comune cronologia dell'èra cristiana) designa il numero cardinale degli anni compiuti, a partire dalla (presunta) nascita di G. C., oppure il numero d'ordine dell'anno in corso per riguardo ad una serie di anni che ha la medesima origine?

Nel primo caso il principio del secolo ventesimo sarebbe il 1° gennaio 1900, nel secondo il 1° gennaio 1901.

Ora l'Aritmetica, o qualsiasi considerazione *a priori*, è incapace di sciogliere una questione di questo genere: tanto varrebbe pretendere di sciogliere *a priori* la questione se chi parla di un «piede» intenda riferirsi al sistema metrico inglese o a quello di un altro paese in cui si usi una misura diversa collo stesso nome.

La risposta si deve domandare alla storia. La quale c'insegna che quando (con DIONIGI IL PICCOLO) s'introdusse l'uso di contare gli anni dalla nascita di G. C., il numero che figura nella data fu

(1) In questa trattazione empirica i due concetti del numero come «cardinale» o «ordinale» vengono presi ambedue come primitivi; in seguito — nella teoria razionale — il «cardinale» si farà derivare per astrazione dall'«ordinale».

Digitized by Google

impiegato come numero ordinale. Perciò il secolo ventesimo è cominciato col 1° gennaio 1901.

Per curiosità ricorderemo che una questione analoga a quella testè indicata sorse anche alla fine del secolo XVIII, e si trova una nota dell'astronomo ARAGO che ne definisce chiaramente i termini, nel senso sopra indicato.

III. — LA SERIE INFINITA DEI NUMERI.

§ 12. **Concetto razionalistico del numero.** — Abbiamo presentato il concetto del numero come resultante per astrazione dal confronto di classi e serie di oggetti materialmente dati, in guisa che le proprietà dei numeri apparivano come espressione di semplici esperienze elementari, intorno alla realtà fisica. Ma come mai tali esperienze potrebbero avere un valore probante al di là dei limiti in cui effettivamente furono esperite?

Operando sopra oggetti e gruppi di oggetti materialmente dati non si arriva *in fatto* che a numeri non troppo grandi. Un uomo, occupato a contare dieci ore il giorno per cinquanta anni della sua vita, arriverebbe press'a poco ad un miliardo. Le esperienze effettive che dovrebbero verificare le proprietà di numeri così grandi richiederebbero un tempo assai maggiore, donde segue un'immensa difficoltà pratica per ottenere siffatte verifiche, quando non si voglia ricorrere all'opera simultanea di vari uomini.

D'altronde una simile impresa, volta alla diretta verificazione delle proprietà aritmetiche dei grandi numeri, non è stata mai tentata — che si sappia — dalla società umana; e se anche si ammetta che una verifica indiretta resulti dal conteggio di numeri superiori al miliardo, che occorre, per esempio, nei bilanci degli Stati moderni, è pur certo che, anche al di là di tali limiti, l'applicazione delle proprietà fondamentali dei numeri non solleva alcun dubbio.

Bisogna dunque ammettere che la conoscenza di cui si tratta non deriva dalla pura esperienza bruta del conteggio su classi di oggetti. Ed invero se l'intelligenza di certi animali o dei selvaggi può essere misurata dal numero massimo cui essa può giungere, per l'uomo civile non esiste alcun massimo nella serie dei numeri.

La nostra mente supplisce alle esperienze effettuate con esperienze immaginate, la cui possibilità di ripetizione indefinita ci porge la costruzione ideale di una serie infinita di numeri.

Digitized by Google

Dunque il fondamento dell'Aritmetica si trova non soltanto nelle esperienze elementari sulle classi di oggetti materialmente dati, ma anche nella facoltà della mente di immaginare esperienze più estese e predeterminarne il resultato mercè la combinazione e ripetizione di processi già esperiti.

Da questa osservazione si passa naturalmente a discutere la domanda:

Fino a che punto è necessario operare sopra oggetti e gruppi di oggetti materialmente dati?

Si può fondare l'Aritmetica senza ricorrere al mondo esterno, col semplice esame riflesso del nostro pensiero?

È chiaro anzitutto che la natura degli oggetti su cui si esperimenta è affatto indifferente al resultato delle esperienze elementari che sottostanno al concetto di numero; è anche indifferente che si ricorra ad esperienze visive, auditive o tattili ecc. Non vi è quindi difficoltà ad ammettere che si possa anche ricorrere semplicemente ad esperienze mentali. Un uomo, dotato di sufficiente forza di astrazione, il quale sia cieco, sordo, muto e paralizzato, potrebbe *pensare* degli oggetti (anche senza immaginarli in modo preciso), e operare con *associazioni* e *astrazioni* puramente ideali sopra classi di oggetti pensati. Queste esperienze mentali sostituiscono le esperienze elementari su oggetti concreti, analizzate innanzi.

A questo punto di vista si riattacca la *tesi razionalistica* che: *le esperienze elementari conducenti alle definizioni dei numeri non vertono sulle proprietà obiettive degli oggetti o delle classi d'oggetti considerati, ma esprimono piuttosto le leggi operative del nostro stesso pensiero, dell'associazione e dell'astrazione logica.*

E così, in tale aspetto, le proposizioni fondamentali sui numeri si palesano non più come enunciati di *fatto* (*a posteriori*), ma come verità necessarie (*a priori*) che rispondono alla struttura e alla funzione della nostra mente.

Il contrasto fra le due tesi empirica e razionalistica si concilia in una *veduta critica* cui già accennammo nell'introduzione storica, la quale si può formulare come segue:

I principî della teoria delle classi, i numeri e le loro relazioni, corrispondono ugualmente alle leggi logiche (*assiomi*) dei processi d'associazione e d'astrazione cui dà luogo il pensiero, e a proprietà generali dei gruppi di oggetti reali, sotto la condizione d'invarianza di questi e nei limiti in cui tale condizione è soddisfatta.

Digitized by Google

In quei principî si riconosce dunque un duplice contenuto subiettivo e obiettivo, il cui confronto può essere spiegato dicendo che i pensieri vengono associati nell'intelletto in modo corrispondente a quello con cui si possono associare in gruppi dei sassi. L'Aritmetica non è un'opinione, perchè i cassieri non possono disporre ad arbitrio del contenuto della cassa, e le loro operazioni mentali secondo le regole di calcolo, conducono ad *aspettative* verificate.

Resta la questione filosofica di sapere se sia la mente umana che ha per così dire imitato nei suoi processi l'esperienza del riunire oggetti materiali, o se viceversa la natura dell'intelletto determini *a priori* quelle operazioni ed esperienze; ma una tale questione non ha alcun senso positivo perchè non ci è dato immaginare l'intelletto umano isolato dalla realtà sensibile che lo circonda, più che questa realtà all'infuori del pensiero che la rappresenta. La facoltà di osservare e sperimentare e quella di ragionare costituiscono infatti i due lati inseparabili di un medesimo sviluppo psicologico, che sfugge al nostro esame obiettivo perdendosi nelle tenebre dell'infanzia.

Dal punto di vista razionalistico riterremo tuttavia la veduta che è possibile la costruzione dei numeri e dell'Aritmetica movendo da un puro esame riflesso del pensiero e delle sue operazioni associative. Ma avvertiremo che, per quanto l'anzidetto esame tenda in ultima analisi a riconoscere leggi del nostro modo di pensare, implicite in ogni esperienza ragionata, queste leggi o assiomi (*a priori*) non si possono scoprire che mediante una riflessione obiettiva (*a posteriori*) sui prodotti del pensiero stesso (FRIES); cioè mediante l'analisi del ragionamento matematico ovvero quella dei linguaggi naturali o dei possibili linguaggi convenzionali o sistemi di segni, mercè cui si tende a fondare la Logica grammaticale o simbolica.

Insisteremo infine su ciò che, per costruire la serie infinita dei numeri, non bastano gli assiomi logici esprimenti le proprietà fondamentali dell'associazione e astrazione, ma occorre un *postulato esistenziale* affermante la ripetibilità indefinita dell'atto del pensare, o la possibilità di determinare *a priori* una serie illimitata di associazioni; l'infinità della serie dei numeri importa appunto questa potenzialità della mente umana che si traduce appunto nel postulato: *dato un numero qualsiasi, esiste sempre un numero successivo ad esso.*

Digitized by Google

NOTA. — Il riconoscimento che la serie dei numeri è infinita, stabilisce, si può dire, una linea di demarcazione fra la mentalità dell'uomo minimamente civilizzato e la mentalità del selvaggio. Infatti l'intelligenza dei selvaggi, come quella degli animali, si suol misurare col numero più alto a cui essa arriva, al di sopra del quale sembra non concepire che una pluralità indistinta.

La considerazione puramente empirica dei numeri trova rispondenza nei *sistemi naturali* di segni o di suoni con cui i numeri si rappresentano. La rappresentazione convenzionale dei numeri mira a rendere esprimibili i numeri più alti, e nella sua forma più evoluta esprime un processo di formazione della serie infinita.

Il sistema di numerazione moderno, basato sul posto delle cifre e sulla considerazione dello zero, fu scoperto da un prete bramino indiano, venne nell' 800 a conoscenza degli Arabi, e si diffuse in Europa nel secolo XIII per opera di LEONARDO PISANO detto il FIBONACCI.

§ 13. **Classi finite e infinite.** — Quando si oltrepassa coll'immaginazione il dato reale dell'esperienza e ci si solleva alla considerazione della serie infinita dei numeri, si hanno — nel pensiero — non più classi di oggetti effettivamente rappresentati o pensati, ma classi di oggetti *pensabili*, in determinate condizioni, cioè *elementi supposti*.

Ora si presentano innumerevoli modi di estendere colla supposizione i dati sperimentali, e nascono così diverse *classi infinite* di oggetti : un esempio è offerto dalla classe di punti che costituisce una retta ; anche qui i punti non possono essere tutti effettivamente pensati uno dopo l'altro, ma pur tuttavia sono supposti come pensabili in guisa da dar luogo a talune relazioni di ordine ecc.

Ma l'estensione del concetto di classe alle classi infinite dà luogo a modificare le relazioni analizzate nel § 7. In quel paragrafo si è usato infatti ripetutamente il principio sperimentale che : « togliendo, uno dopo l'altro, gli elementi d'una classe, si arriva ad esaurire la classe », il cui significato è appunto la finitezza della classe considerata. Non valendo più questo principio vediamo cadere la prop. 4) o 4') del § 7 :

Una classe infinita può essere equivalente ad una sua parte.

Data la serie dei numeri

$$1,\ 2,\ 3, \ldots\ n \ldots,$$

Digitized by Google

è chiaro ch'essa è equivalente a quella che si ottiene togliendo il primo numero:

$$2, 3, 4, \ldots n'$$

perchè fra le due intercede la corrispondenza:

$$n' = n + 1.$$

Parimente, mercè una riduzione proporzionale (similitudine) un segmento, una retta, una figura qualsiasi del piano o dello spazio, può essere posta in corrispondenza con una sua parte.

Sembra che vi sia qui una proprietà generale; tutte le volte che è data una classe infinita, riconosciamo in essa una parte equivalente al tutto. Cerchiamo di provare che questa proprietà sussiste infatti per ogni classe infinita.

Anzitutto: se una classe è *numerabile*, cioè può esser fatta corrispondere biunivocamente alla serie infinita dei numeri 1, 2, 3.... essa è equivalente ad una sua parte (quella che corrisponde alla serie 2, 3,...).

In secondo luogo: se una classe C contiene una serie numerabile S, si può porre come innanzi una corrispondenza fra S ed una sua parte ed in pari tempo far corrispondere ad ogni elemento di C fuori di S se stesso; con ciò resta provato che C è equivalente ad una sua parte.

In terzo luogo si consideri una classe C qualsiasi: si scelga in C un elemento arbitrario che si designerà con 1, quindi un secondo elemento che si designerà con 2, e così via.

Se, dopo un numero finito di scelte la classe C è esaurita, essa corrisponde ad una classe finita (1, 2, 3,... n) ed è finita com'essa; se così non è, *sembra* che la classe C contenga una classe numerabile in corrispondenza colla serie infinita (1, 2, 3,...), e però che essa sia equivalente ad una sua parte.

Tuttavia questa deduzione contiene un *punto delicato*: infatti essa suppone la possibilità di compiere entro C, non solo un numero grande di scelte, ma un *numero infinito di scelte arbitrarie*. Questa possibilità trascende le facoltà del pensiero umano, a meno che non si possa fissare una *regola che determini* a priori *le scelte successive, dipendentemente da un numero finito di operazioni*. Una regola siffatta è facile a trovare per tutte le classi di cui il nostro pensiero ha effettivamente costruita un' immagine; ma l' indeterminatezza del

Digitized by Google

concetto generale di classe lascia indecisa la questione se la possibilità di una tal regola sia data per ogni classe. A dirimere tale questione ZERMELO (1) ha introdotto il *postulato*: data una classe C, e considerato l' insieme I di tutte le sottoclassi che ne costituiscono le parti proprie, si può stabilire fra questo e C una corrispondenza univoca (non univocamente invertibile) in cui ad ognuna di tali sottoclassi corrisponda un suo elemento.

È chiaro che *per le classi soddisfacenti al postulato di* ZERMELO *la possibilità di stabilire una corrispondenza biunivoca fra una classe ed una sua parte propria appartiene a tutte le classi infinite, e costituisce quindi un carattere distintivo fra le classi infinite e le classi finite.*

Ma non bisogna farsi illusione sul valore del postulato di ZERMELO e sulle conseguenze che si ha il diritto di trarne! Un postulato esprime sempre e soltanto una condizione eventualmente restrittiva per la definizione degli enti che vi si sottopongono: perciò non si ha il diritto di applicare *a priori* il postulato di ZERMELO a classi che siano state indipendentemente definite, per es. alla classe costituita dai punti d' un segmento ecc. Ora, per quanto concerne la questione posta innanzi, occorre limitarsi all'osservazione che tuttavia, da tutte le classi infinite che ci sono praticamente conosciute, si può sempre estrarre una successione numerabile, che permette di riferire la classe stessa ad una sua parte propria. L'applicazione del postulato di ZERMELO sembra dunque in qualche modo giustificata *a posteriori*, in ordine alla nostra questione; all'opposto le altre conseguenze, di maggiore portata, che l'autore ha creduto di trarre dal suo principio, sono ben lungi da dar luogo ad una qualsiasi giustificazione. Ma di ciò più avanti!

§ 14. **Potenza delle classi infinite.** — Ora accenneremo come la teoria dei numeri cardinali, relativi a classi finite, abbia dato luogo ad una estensione per le classi infinite. Il concetto di *potenza* di una classe, dovuto a G. CANTOR, risponde appunto al concetto di *numero cardinale infinito* (2).

A base di questa teoria di CANTOR sta l'osservazione che il confronto di due classi infinite può dar luogo, come per le classi finite, a un giudizio di equivalenza o di prevalenza.

(1) « Math. Annalen », 59 (1904), 65 (1908).

(2) Ed egli stesso gli dà anche questo nome. Si vedano le memorie citate a p. 235.

Digitized by Google

Due classi sono equivalenti se tra gli elementi dell' una e quelli dell'altra intercede una corrispondenza biunivoca. Tale relazione soddisfa, come per il caso delle classi finite, alle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Una classe è prevalente ad un'altra quando si può porre una corrispondenza biunivoca fra gli elementi di questa e gli elementi di una parte di quella. Come per le classi finite, la prevalenza fra classi infinite soddisfa alla proprietà transitiva; ma, a differenza di quel caso, soddisfa anche alla proprietà riflessiva; inoltre essa può soddisfare anche, in qualche caso, alla proprietà simmetrica, che non appartiene mai alla prevalenza fra classi finite.

Queste differenze si riconducono alla circostanza fondamentale che:

Una classe infinita può essere contemporaneamente equivalente e prevalente ad un'altra.

Ora sussiste il

Teorema di Bernstein. — *Se* A *e* B *sono due classi, ciascuna delle quali è prevalente all'altra,* A *e* B *sono classi equivalenti.*

Dimostriamo questo teorema fondamentale valendoci delle semplificazioni dovute a Peano e Padoa.

Secondo l' ipotesi è data una corrispondenza biunivoca fra A e una parte B' di B, e un'altra corrispondenza biunivoca fra B e una parte A' di A. In questa seconda corrispondenza a B' corrisponderà una parte A'' di A'.

Si ha così una corrispondenza fra A e A'' parte di A', cioè una corrispondenza *univoca similare* fra A, A', che non è invertibile per gli elementi di $A' - A''$; si tratta di porre una corrispondenza biunivoca fra A ed A', e perciò basterà determinare una parte C di A' in tal guisa che togliendo C da A e da A' rimanga una corrispondenza univoca invertibile, ossia biunivoca, fra $A - C$ e $A' - C$; infatti, ponendo allora in C la corrispondenza identica, si avrà una corrispondenza biunivoca fra A ed A'. Ora la possibilità di determinare la classe C nel modo anzidetto, risult dal seguente

Lemma. — Se si ha una corrispondenza univoca similare fra una classe A ed una sua parte A', cioè una corrispondenza biunivoca fra A ed una parte A'' di A', si può sempre determinare una parte C di A' tolta la quale rimanga una corrispondenza biunivoca fra $A - C$ ed $A' - C$.

Digitized by Google

Si indichi con π la corrispondenza data fra A'' e A, e si consideri l'insieme degli elementi P di A'' a cui corrisponde in π^r ($r = 1, 2....$) un elemento di $A' - A''$; l'insieme di questi P aggiunto ad $A' - A''$ costituisce la classe C che volevasi determinare.

Il teorema di BERNSTEIN permette di distinguere i seguenti casi nel confronto di due classi infinite A e B:

1) le due classi sono equivalenti; in tal caso si dice che esse hanno *uguale potenza*;

2) le due classi *non* sono equivalenti, ed una di esse, per es. A, è prevalente all'altra B; in tal caso si dice che la *potenza* di A è *maggiore* di quella di B;

3) le due classi non sono comparabili nel senso che non si sa porre una corrispondenza fra l'una e l'altra, o fra una di esse e una parte dell'altra.

Quest'ultima eventualità, che non sembra potersi escludere, implica una limitazione della teoria delle potenze di CANTOR: si suppone sempre di riferirsi a classi comparabili, che dieno luogo ad uno dei giudizi 1) o 2).

La prima classe infinita che viene considerata da CANTOR è quella (di minima estensione) costituita dai numeri naturali: 1, 2, 3..., n.... Ogni classe i cui elementi si possono far corrispondere ai numeri naturali si dice *numerabile*. Tutte le classi numerabili hanno la stessa potenza minima che possa appartenere ad una classe infinita.

In seguito vedremo che la classe dei punti di un segmento (o della retta) non è numerabile, cioè che la potenza del continuo è maggiore di quella di una classe numerabile.

In generale notiamo, a titolo d'informazione, che data una classe qualsiasi si può sempre costruire una nuova classe che abbia potenza maggiore di quella. Basta considerare l'insieme di tutte le classi formate cogli elementi della classe data (classe di classi).

Il continuo rettilineo ha la stessa potenza della superficie (quadrato o piano), del volume (cubo o spazio) ecc. (cfr. § 47); ma l'insieme di tutti i possibili gruppi (infiniti) di punti d'un segmento ha potenza maggiore di questo ecc.

Infine accenneremo ad una importante questione posta da CANTOR, che rimane per ora insoluta: se esista qualche classe (gruppo di punti sulla retta) che abbia potenza intermedia fra il numerabile e il continuo.

Digitized by Google

§ 15. **Serie finite e infinite.** — Una classe infinita, alla stessa guisa di una classe finita, può concepirsi come una *serie ordinata* (1) per modo che:

1) dati due elementi della serie, uno di essi *succede* all'altro (e questo *precede* quello);

2) se l'elemento c succede a b e b succede ad a, anche c succede ad a.

Ma l'ordine di una serie infinita non soddisfa sempre alle proprietà 3), 4), 5) indicate al § 10 per l'ordine di una serie finita; così per es. la serie dei punti d' una retta è ordinata, ma dato un punto non vi è un successivo immediato nè un precedente immediato di esso. Infatti l'esistenza di un successivo immediato (e di un precedente immediato) si deduce dall'esistenza di un successivo (e rispettivamente d' un precedente), tenuto conto della *finitezza* della serie come classe: se b è successivo ad a, ma vi sono elementi dopo a e prima di b, si prenda uno di questi, c; se c non è successivo immediato ad a, si prenda un elemento successivo ad a e precedente a c e così di seguito; se la serie data è finita, la serie dei tentativi si esaurisce e conduce al successivo immediato di a.

Come in una serie infinita può darsi che per un elemento (non ultimo) manchi un successivo immediato, e di un elemento (non primo) non vi sia alcun precedente immediato, così può anche accadere che una serie infinita non possegga un *primo* nè un *ultimo*

(1) Secondo la nostra concezione della logica, come processo del pensiero, l'«ordine» è un concetto primitivo al pari della «classe», anzi la classe ordinata «precede» psicologicamente la «classe» in cui gli elementi sono riuniti senza un ordine. Ma per coloro che hanno della logica una veduta statica, l'idea dell'«ordine» esige un'analisi, quale è fatta da Russell colla cosiddetta *logica delle relazioni*: una classe si dice ordinata quando esiste una funzione a due valori di due elementi qualunque,

$$R(a\,b) = >$$

o

$$R(a\,b) = <,$$

colla condizione che se

$$R(a\,b) = >, \quad R(b\,a) = <,$$

e da

$$R(a\,b) = >, \quad R(b\,c) = >,$$

si deduca

$$R(a\,c) = >.$$

Digitized by Google

elemento. La serie 1, 2, 3..., n.... non ha ultimo elemento; la serie ....$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3..., non ha nè primo, nè ultimo elemento.

CANTOR chiama *bene ordinata* una serie che soddisfa al seguente requisito:

3) la serie ha un *primo* elemento, ed *ogni serie* contenuta nella data come *parte* ha sempre un *primo elemento.*

Questa proprietà è legata coll'esistenza di un successivo immediato. Si ha infatti il teorema:

In una serie bene ordinata ogni elemento, che non sia ultimo, ha un successivo immediato.

Sia a un elemento (non ultimo) di una serie bene ordinata, gli elementi successivi ad a formano una serie, parte della data; che è come questa bene ordinata, e quindi ha un primo elemento, b: che è il successivo immediato di a.

Il teorema anzidetto non è invertibile. Per es. nella serie

$$1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}\ldots, \quad \ldots 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, 3,$$

ogni elemento ha un successivo immediato, ma pure la parte

$$\ldots 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, 3,$$

non possiede primo elemento.

L'esempio qui addotto mostra anche la possibilità di concepire serie soddisfacenti a tutte le proprietà 1).... 5) del n. 10 (esistenza di primo ed ultimo elemento, precedente e successivo immediato), che pur sono, come classi, infinite: in guisa che per due serie siffatte non resulta più *determinata* una corrispondenza ordinata similare (cioè una corrispondenza biunivoca fra una delle due classi e una parte dell'altra), dalla semplice condizione che si corrispondano i primi elementi. Per arrivare alla teoria dei numeri ordinali, occorre dunque restringere il concetto della serie al caso delle *serie finite*; e il concetto del buon ordinamento di CANTOR c'indica come ciò possa farsi.

Diciamo *perfettamente ordinata* una serie quando è *bene ordinata insieme all'inversa,* cioè ordinata in guisa che:

ogni parte di essa possegga un *primo* e un *ultimo* elemento.

Digitized by Google

È chiaro che *una serie perfettamente ordinata è finita*, nel senso comune della parola.

Infatti si abbia la serie bene ordinata:

$$S = a_1, a_2, a_3 \ldots ;$$

se essa non è finita, contiene la serie numerata

$$s = a_1, a_2, a_3 \ldots a_n \ldots$$

corrispondente a tutti i valori di n, sia che esistano *dopo* gli elementi di questa serie altri elementi, oppure no; in ogni modo s è parte di S. Ma se prendiamo gli elementi di S, e quindi di s, nell'ordine inverso, la serie S così ottenuta non è bene ordinata, perchè contiene una parte ($\bar{s}$) senza primo elemento.

In luogo della dimostrazione precedente che assume come presupposto il concetto comune del numero ordinale, si può indicare come «*la proprietà delle serie perfettamente ordinate* conduce, non solo alle proposizioni 1) ..., 5) del § 10, ma altresì a definire una corrispondenza ordinata similare fra due serie di cui si associno i primi elementi», sicchè essa può assumersi come *definizione delle serie finite*, dando luogo *a costruire logicamente la teoria dei numeri ordinali*.

A tale scopo si considerino due serie perfettamente ordinate

$$\begin{array}{ll} 1) & \mathrm{a}_1\ \mathrm{a}_2 \ldots \mathrm{b} \\ 2) & \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \beta, \end{array}$$

e si costruisca la serie che ha per elementi le coppie $\mathrm{a}_1, \alpha_1 \ldots$:

$$3) \quad \mathrm{a}_1\,\alpha_1,\ \mathrm{a}_2\,\alpha_2 \ldots$$

È chiaro che la serie 3) si trova in corrispondenza biunivoca ordinata con una parte della 1) e con una parte della 2): quindi essa ha un ultimo elemento che risponde a due elementi di ugual posto delle 1) e 2), diciamo a_i ed α_i. Ora si riconosce che, se a_i precede b, necessariamente α_i coincide con β: poichè altrimenti la 3) conterrebbe un elemento, $\mathrm{a}_{i+1}\ \alpha_{i+1}$, successivo ad $\mathrm{a}_i\ \alpha_i$. In conclusione resta definita fra le 1) 2) una corrispondenza ordinata che ad ognuno degli elementi di una almeno delle due serie fa

Digitized by Google

corrispondere un ben determinato elemento dell'altra: che è il requisito delle corrispondenze similari.

E perciò, come si è detto, le serie perfette porgono la definizione per astrazione dei comuni numeri ordinali.

§ 16. Classi finite e principio dell'invarianza del numero. — La proprietà delle serie finite, che abbiam visto porgere una costruzione logica della teoria dei numeri ordinali, ci permette ora di colmare la lacuna rilevata alla fine del § 14, definendo rigorosamente le *classi finite* e quindi i numeri cardinali. Diciamo *classe finita una classe in cui si può stabilire un ordinamento perfetto*: sicchè i suoi elementi possono farsi corrispondere ad una serie di numeri ordinali 1, 2.... n.

Questa definizione dà luogo a stabilire un principio che E. SCHRÖDER (1) per primo ha formulato sotto il nome di *principio dell'invarianza del numero*. Ritenendo egli il primato psicologico del numero ordinale, voleva definire il numero (cardinale) degli oggetti d'una classe C come numero d'ordine dell'ultimo oggetto per riguardo ad un ordinamento (cioè ad un modo di numerazione) degli elementi di C, e rilevava quindi il presupposto che codesto numero non varii per diversi ordinamenti di C. Più tardi KRONECKER (l. c., 1887) introduceva esplicitamente questo principio come un *postulato* relativo alla classe dei numeri (1, 2..., n), mentre HELMHOLTZ (l. c., 1887) tentava di dimostrarlo, deducendolo da ciò che il numero non varia per uno scambio di due elementi i, k della classe (1, 2,... a), e che ogni ordinamento della classe si può ottenere da uno dato, con successive trasposizioni (i, k). Ma, a dir vero, questa dimostrazione non può tenersi come soddisfacente, perchè il presupposto di arrivare con successive trasposizioni a qualunque ordinamento di C (in cui si esprime il cosiddetto principio d'induzione matematica) sembra equivalere insomma a ciò che qua si domanda di dimostrare.

Ora, tutta la difficoltà di stabilire con rigore il principio dell'invarianza del numero, si riduce, a nostro avviso, alla definizione logica delle classi finite per mezzo delle serie perfettamente ordinate. Infatti sulla base di questa definizione giungeremo allo scopo (2), dimostrando successivamente che:

1) *Se per gli elementi d'una classe finita si stabilisce co-*

(1) *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, Lipsia, 1873, p. 14.
(2) Cfr. ENRIQUES, « Rendic. Lincei », Settembre 1923.

Digitized by Google

munque un criterio d'ordinamento, si ottiene sempre un ordinamento perfetto.

2) *Una classe finita non può essere equivalente ad una sua parte propria.*

3) *Per qualunque ordinamento d'una classe finita, il numero d'ordine dell'ultimo elemento è sempre il medesimo* (principio di SCHRÖDER).

1° TEOREMA. — Sia C una classe finita, che perciò si può supporre, per un certo ordinamento, perfettamente ordinata; e sia S un'altra serie (equivalente come classe) in cui vengono disposti gli elementi di C. Vogliamo provare, intanto, che S possiede un ultimo elemento. A tal uopo distinguiamo in C quegli elementi, che designeremo con a, cui spetta la seguente proprietà:

l'elemento a' omologo di a, consegue (in S) a ciascuno degli elementi omologhi ai precedenti di a (in C).

L'insieme degli a forma una parte di C ($a_1 a_2 \ldots a_i$) che è perfettamente ordinata e possiede un ultimo elemento a_i: dico che il corrispondente a'_i di a_i costituisce l'ultimo elemento di S. Infatti se dopo a'_i esiste in S qualche altro elemento b', il suo corrispondente b, in C, non può certo precedere a_i: supponiamo pertanto che vi siano in C degli elementi b, successivi ad a_i il cui omologo segua a_i (in S), e riduciamo all'assurdo questa supposizione. Per ciò basta osservare che gli elementi b formano una parte di C e quindi vi è fra essi un primo elemento, b_1; questo b_1 è tale che gli omologhi (in C) dei suoi precedenti sono a'_i ed elementi precedenti a'_i (in S), e quindi precedono tutti b'_1 (omologo di b_1); perciò b_1 resulta per definizione un elemento della classe (a) successivo ad a_i, che si era supposto essere l'ultimo.

Lo stesso ragionamento qui adoperato, scambiando l'ordine di S nel suo inverso, vale a provare che S possiede anche un *primo* elemento.

Siccome poi, ogni parte della serie perfettamente ordinata C è del pari perfettamente ordinata, la stessa dimostrazione permette di concludere che anche ogni parte di S (equivalente ad una parte di C) possiede insieme un primo ed un ultimo elemento, c. d. d.

2° TEOREMA. — Una classe finita C non può essere equivalente ad una sua parte propria.

Pongasi che vi sia corrispondenza biunivoca π fra C e una sua

Digitized by Google

parte propria C', diguisachè esista in C un elemento a, non appartenente a C'. Allora si consideri la serie (*catena*) costituita da:

$$a,\ a' = \text{omologo di } a,\ a'' = \text{omologo di } a', \ldots.$$

La serie costituita da *tutti* gli elementi che così vengono ottenuti è una classe ben definita e ordinata. Infatti:

1) appartiene alla classe un elemento x quando esiste una serie perfettamente ordinata

$$x = x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots a$$

che ha per ultimo elemento a, in cui ogni elemento ha come omologo il successivo nella corrispondenza inversa di π: allora questa serie perfettamente ordinata (x) è evidentemente unica;

2) l'ordine della classe si stabilisce fissando che, fra due elementi x ed y di essa, x preceda y, quando x è contenuto fra i successivi di y nella serie (y).

Ora si avverta: come a appartiene a C e non a C', così a' appartiene a C' e non alla classe omologa C'', a'' appartiene a C'' e non alla classe omologa C''' ecc.; dunque non può mai accadere che un elemento della catena a, a', a'' .... venga a coincidere con qualcuno dei precedenti, e però *la catena non ha ultimo elemento*, in contraddizione col 1° Teorema.

3° Teorema (Principio di Schröder). Se C e C' sono due classi perfettamente ordinate, fra loro equivalenti, esiste anche fra di esse una corrispondenza ordinata in cui i due ultimi elementi si corrispondono (avendo così lo stesso numero d'ordine).

Se si nega la tesi, accadrà per esempio che all'ultimo elemento di C' risponda, nella corrispondenza similare fra C e C', un elemento che precede l'ultimo, e quindi C' resulterà equivalente ad una parte propria di C, in contraddizione al 2° Teorema.

Ora, la definizione introdotta delle classi finite come perfettamente ordinabili, conduce senza difficoltà a dedurre tutte le proprietà delle classi analizzate nel § 7, senza ricorrere a quel principio d'induzione in cui ivi si traduceva il carattere finito delle classi d'oggetti materialmente dati. Enunciamo qua la conclusione: *le proprietà elementari delle classi finite e quindi dei numeri cardinali, si dimostrano* — a partire dai concetti puramente logici di classe, ordine, corrispondenza e dai relativi assiomi (logici) — *in base alla definizione delle classi finite come perfettamente ordinabili.*

Digitized by Google

§ 17. **Il principio d'induzione matematica e i numeri transfiniti.** — Il principio dell'invarianza del numero, stabilito innanzi, si può ritenere come un *principio di subordinazione dei numeri cardinali agli ordinali*, in quanto conduce a definire per astrazione il numero cardinale d'una classe come il numero d'ordine dell'ultimo elemento di essa in un suo ordinamento qualsiasi, conforme alla veduta genetica.

Dopo ciò le classi si possono ordinare, come nel § 11, in ordine di prevalenza, ed in modo che a ciascuna classe — o categoria di classi equivalenti — succede quella che si ottiene aggregandovi un nuovo elemento.

La serie stabilita in tal guisa, è prolungabile oltre ogni limite?

La risposta affermativa a questa domanda resulta dal *postulato esistenziale della somma*:

date due classi C e C', senza elementi comuni, si possono sempre *riunire* in un'altra che comprende tutti e soli gli elementi di C e C'; e se le due classi hanno elementi comuni, esiste sempre una classe equivalente a C', che non ha elementi comuni con C.

D'altra parte la *serie infinita* dei numeri naturali

$$1,\ 2,\ 3 \ldots.\ n \ldots,$$

o qualunque altra *serie numerata* di cui essi porgano i numeri d'ordine, può essere caratterizzata direttamente mercè le considerazioni che seguono.

Si abbia una qualsiasi relazione R, dipendente da un numero x; se questa relazione è verificata per $x = 1$, e se dall'essere verificata per $x = n$, si deduce ch'essa sussiste per $x = n + 1$, allora la relazione sussiste in generale per tutti i valori di $x = 1, 2, 3 \ldots. n \ldots.$; in simboli: se

$$R(1) = 0,$$

e da

$$R(n) = 0,$$

si deduce

$$R(n + 1) = 0,$$

si ha

$$R(m) = 0,$$

m designando un numero comunque grande.

Digitized by Google

Il principio qui enunciato è appunto il *principio d'induzione matematica*, ed il suo riconoscimento come principio logico risale a MAUROLICO.

Con esso s'introduce in una maniera precisa il postulato razionalistico, che assume come *teoricamente illimitata* la ripetibilità di atti del pensiero cui, nell'esperienza pratica, non si può segnare un limite determinato, e si enuncia che questa ripetizione conduce in effetto a *tutti i numeri*.

Perciò il detto principio è suscettibile di apparire, come proprietà caratteristica della serie infinita dei numeri naturali o delle serie numerate.

Invero CANTOR (1883) ha notato che vi sono *serie ben ordinate* (come la $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots 0)$ *che si prolungano al di là della serie dei numeri naturali*, e i cui elementi vengono rappresentati da numeri d'ordine non più finiti, ma *transfiniti*. La serie dei numeri naturali appare dunque come *serie minima* fra le serie infinite, ben ordinate; ed è appunto tale proprietà di minimo che si esprime col principio d'induzione matematica.

Questa considerazione appartiene a DEDEKIND (l. c., 1887) che l' ha svolta nella maniera seguente.

Si assuma una classe (infinita) C equivalente ad una sua parte propria C': si avrà dunque un'operazione φ che ad ogni elemento, a, di C, fa corrispondere un elemento, a', di C'; e, se a non appartiene a C', la serie S degli omologhi

$$a, \; a' = \varphi(a), \; a'' = \varphi(a') \ldots$$

resulta infinita, poichè nessuno degli elementi di S può coincidere con uno dei precedenti, e dopo ogni elemento (b) vi è sempre un successivo $(\varphi(b))$ (1).

Orbene della serie infinita (numerata) $S = a\, a'\, a'' \ldots$ DEDE-

(1) Più precisamente, nel suo sistema — che per il rigore logico e filosofico segna uno dei punti più alti della critica aritmetica — DEDEKIND definisce la serie

$$a \; a' \; a''$$

catena dell'elemento a, come l'*interferenza di tutte le catene che contengono a*, dove il termine « catena » significa in generale per lui una qualsiasi parte di C che contenga la sua immagine rispetto a φ.

Dopo avere così definito le serie ben ordinate minime, l'A. – con-

Digitized by Google

KIND (l. c.) dimostra che appartiene per intero ad ogni classe R che goda delle due proprietà seguenti:

1) R contiene a;

2) se R contiene b, contiene anche l'elemento successivo, $\varphi(b)$.

E l'A. riconosce in questa proprietà della serie S il principio d'induzione matematica, che si tradurrà nella maniera ordinaria ove si sostituisca, nell'enunciato, la *classe* R colla *relazione* che vale a determinarla estensivamente (ogni a appartiene ad R).

Nella stessa forma indicata da DEDEKIND, anche PEANO (l. c.), considera il principio d'induzione come proprietà della serie dei numeri ordinali 1, 2...., n....; ma tuttavia non s'indugia a dimostrare tale proprietà, deducendola da un presupposto di *minimo* della serie stessa, ed all'opposto l'assume come *postulato*, ad indicare che la serie data non si prolunga al di là dei termini raggiungibili con una successione di operazioni φ.

Pertanto le proprietà caratteristiche della serie dei numeri, vengono raccolte da PEANO, nel *sistema di postulati* seguente:

1) I *numeri* sono elementi d'una classe (N):

2) Esiste un'operazione (*successivo di* = *suc*) che trasforma ogni numero in un numero;

se a è un N, *suc* a è un N.

3) L'operazione *suc* non può essere invertibile in più modi diversi:

se $$suc\ x = suc\ y,$$

segue $$x = y.$$

4) Esiste un numero «*lo 1*» (1) che non è successivo ad alcun altro, sicchè qualunque sia N

$$suc\ N \neq 1$$

frontando le diverse serie possibili – definisce i termini «d'ugual posto» e ne trae per astrazione i *numeri ordinali*.

Il lavoro di DEDEKIND apparirà, tradotto in italiano e illustrato da note storico-critiche per cura di O. ZARISCHI, nella collezione «Per la storia e la filosofia delle matematiche» che F. ENRIQUES, prepara per l'editore Stock. A questa pubblicazione dovrà ricorrere il lettore che ami allargare la conoscenza critica moderna, toccante i principî dell'Aritmetica, e comprenderne più profondamente lo sviluppo.

(1) In esposizioni successive, PEANO ha cambiato qui «lo 1» con «lo 0», per motivi di semplicità algoritmica.

Digitized by Google

5) *Principio d'induzione*: se R è una classe contenente 1, e se dall'ipotesi che R contenga N si deduce che contiene il *suc* N, allora R contiene tutti gli N.

D'accordo colle osservazioni del § 5 si può notare soltanto che il sistema predetto, piuttostochè la serie dei numeri naturali, vale a caratterizzare le *serie numerate*, dal cui confronto come già avvertiva DEDEKIND, sorgono per astrazione i numeri ordinali (cfr. § 15).

Più brevemente i postulati 1).... 5) si lasciano riassumere nella definizione: *Serie numerata è una serie bene ordinata* (di cui ogni parte ha un primo elemento, cfr. § 15) *soddisfacente al principio d'induzione.*

E i numeri naturali 1, 2.... n.... sono i numeri d'ordine degli elementi delle serie numerate, poste tra loro in corrispondenza biunivoca ordinata.

Rileviamo esplicitamente che la considerazione di serie bene ordinate non soddisfacenti al postulato 5), conduce ad estendere il concetto ordinario dei numeri ordinali, considerando *numeri ordinali infiniti*: tali sono *i numeri transfiniti* di CANTOR, cui già innanzi si è accennato incidentalmente.

Si abbia una serie bene ordinata, S, che non soddisfi al postulato 5); allora vi sono in essa degli elementi successivi a quelli che portano un qualsiasi numero d'ordine n per quanto grande; la serie di tali elementi, S_1 (successivi alla serie 1, 2, 3....) è una parte di S, e perciò possiede un primo elemento ω; il successivo di ω si può designare con $\omega + 1$ e così via.

Si ha così una serie

$$S = 1, 2, 3...., \omega, \omega + 1, \omega + 2...., 2\omega, 2\omega + 1,..., ...$$

che si può immaginare indefinitamente proseguita.

Il simbolo ω che designa il primo elemento della serie successivo ai numeri naturali (finiti) si può considerare come il più piccolo numero ordinale infinito (transfinito).

Se nella serie vi è un elemento successivo ad

$$\omega, 2\omega, 3\omega....,$$

questo si può designare con ω^2. Si comprende quindi la possibilità che la serie contenga anche elementi

$$\omega^3\ \omega^4...., \omega^\omega \text{ ecc.}$$

Digitized by Google

La serie dei numeri transfiniti qui considerati, trova un'immagine geometrica in una serie di punti che si costruisca opportunamente sopra la retta in guisa che: ω corrisponda ad un punto limite dalla serie 1, 2, 3...., ; 2ω *ad un punto limite della serie* $\omega + 1$, $\omega + 2$....; ω^2 *ad un punto limite della serie* ω, 2ω, 3ω..., ecc.

Aggiungiamo che il ragionamento per induzione matematica si estende anche alle serie che contengono elementi ω, nella forma dell'*induzione transfinita*: se una classe C contiene il primo elemento della serie, e se dall'ipotesi ch'essa contenga tutti i precedenti di un elemento b si deduce che contiene anche b, la C contiene tutta la serie.

Nota I. — Riguardando alle serie bene ordinate che contengono elementi transfiniti, appare che in esse esiste sempre, oltre il primo, almeno un elemento, ω, che non ha un *precedente* immediato (di cui è il successivo). A quest'osservazione si lega la forma degli assiomi aritmetici assunti da Pieri (1), il quale postula che:

1) i numeri formano una classe (non illusoria), N;

2) dopo un numero vi è un susseguente;

3) vi è un solo numero che non è il susseguente di alcun altro;

4) in ogni classe di numeri, vi è sempre un numero che non è susseguente ad alcun numero della classe.

Invero questi assiomi portano che gli N formino una serie ben ordinata [4], in cui ogni elemento che non sia il primo ha sempre un precedente [3] (2).

Nota II. — Quando la serie dei numeri transfiniti è comunque prolungata mediante una costruzione mentale, *dipendente da un numero finito di convenzioni*, immaginando un successivo ω^ω dopo $\omega, \omega^2, \omega^3$...., e quindi un successivo dopo $\omega^\omega, \omega^{2\omega}, \omega^{3\omega}$.... ecc., si cade sempre in *classi numerabili*.

Si può anche dimostrare (facendo uso di un ragionamento che svolgeremo nell'ultimo capitolo di questo Articolo) che *ogni serie ben ordinata di punti susseguentisi sopra la retta* (serie a cui conduce l'immagine geometrica dei transfiniti definita innanzi) è numerabile.

(1) *Sopra gli assiomi aritmetici.* « Bollettino dell'Accademia Gioenia di Catania » (serie 2ª, 1908).

(2) Giova rilevare: il surrogato del principio d'induzione non consiste tanto nel post. 4 (come l'A. sembra credere) bensì nel 3°, che lo completa ed esclude i transfiniti.

Digitized by Google

Nasce ora la questione se sia possibile disporre i punti di un continuo (per es. d'un segmento) in una serie bene ordinata, diguisachè il numero cardinale che designa la potenza del continuo, si presenti come un numero della serie dei transfiniti. Tale questione, proposta da CANTOR, ha dato luogo a numerosi tentativi; in particolare ZERMELO ha creduto di risolverla affermativamente in base al postulato che abbiamo enunciato alla fine del § 13. Ma, per l'osservazione ivi fatta, questa dimostrazione non può ritenersi come concludente o in alcun grado persuasiva. Perchè non soltanto si assume in essa la possibilità di compiere effettivamente col pensiero infinite operazioni di scelta non predeterminate da qualche criterio esterno, ma — ciò che è più incomprensibile — di prolungare queste operazioni in un modo *trascendentemente infinito*, al di là del numerabile. Presupposizioni trascendenti di questo genere hanno condotto nella teoria degl'insiemi a certi *paradossi* caratteristici; per es. l'ipotesi che sia lecito considerare come un oggetto logico la serie di *tutti* i numeri transfiniti, conduce al cosiddetto *paradosso* di BURALI-FORTI, dove si dimostra che quella serie possiede e non possiede un ultimo elemento: onde il concetto di essa si palesa contraddittorio.

Or dunque nello stato attuale della questione — nonostante i consensi che il lavoro di ZERMELO ha trovato presso una parte dei matematici (a tendenze *realiste*) (1) — *rimane dubbio se il continuo*

(1) Chi vuol avere un'idea delle discussioni intorno a quest'argomento veda gli articoli contenuti nel volume 50 dei « Math. Annalen » e le cinque lettere sulla teoria degl'insiemi nel « Bullettin de la Société mathématique de France », tome 33. Conviene anche ricordare particolarmente i lavori di HILBERT citati alla fine del § 5, in cui si fa dipendere il postulato di ZERMELO da un nuovo *principio d'esistenza d'una funzione transfinita*, e le critiche che esso ha già sollevato da parte di M. CIPOLLA (« Annali di Matematica », 1923).

Il punto vero della questione toccato anche da B. LEVI (in una lettera a HILBERT pubblicata nei « Math. Annalen », 90), è che, come abbiamo accennato nel § 13, il postulato di ZERMELO o il principio di HILBERT, non sono affatto *postulati* nel senso di « condizioni » restrittive del concetto del continuo (che è perfettamente definito dai postulati ordinari). Vogliam dire che vi è in essi un *assioma*, esprimente una legge operativa della nostra mente? Ebbene, il meno che si possa osservare è che questa legge non è legge per tutte le menti. Onde accade in fatto che le dimostrazioni con cui si dovrebbe rispondere al dubbio « se il continuo possa essere ben ordinato » non hanno forza di convincere nessuno di quelli che veramente ne dubitano.

Digitized by Google

possa essere bene ordinato. Perchè tale buon ordinamento avesse un senso *positivo* bisognerebbe farlo dipendere da un criterio determinato, o determinabile a partire da una realtà data, mediante un numero finito di atti arbitrari del pensiero; ed un siffatto criterio non sembra potersi assegnare. La prova *negativa* esigerebbe invece di dedurre una contraddizione dall'ipotesi di una serie ben ordinata avente la potenza del continuo: ma non sembra doversi affermare che l'impossibilità di una costruzione positiva implichi necessariamente la possibilità di questa dimostrazione negativa.

Anche a prescindere dalla probabile impossibilità di estendere la serie dei transfiniti fino ad avere una serie ben ordinata della potenza del continuo, l'estensione dei *numeri cardinali* conduce a *una specie diversa di numeri infiniti,* poichè dal punto di vista cardinale si avrebbe

$$\omega = \omega + 1 = \ldots. = 2\omega = \ldots. = \omega^2 = \ldots.,$$

ciascuno di questi numeri corrispondendo ugualmente ad un insieme numerabile.

IV. — Le operazioni fondamentali dell'Aritmetica.

§ 18. **Introduzione.** — Le quattro operazioni fondamentali dell'Aritmetica sono: *l'addizione,* la *moltiplicazione* e le *operazioni inverse* a queste: *sottrazione* e *divisione.*

La teoria delle operazioni (tranne per quanto concerne l'estenzioni *dirette*: addizioni e moltiplicazioni.
sione del campo dei numeri) si può dunque limitare alle due opera-

Noi esporremo due modi di sviluppo di siffatta teoria:

1) sviluppo fondato sul principio d'invarianza del numero, che vale ad associare numeri cardinali ed ordinali;

2) e sviluppo fondato sul principio d'induzione, caratteristico per la serie infinita dei numeri ordinali. Come vedremo, la prima teoria, che fa capo al concetto del numero (cardinale) degli oggetti d'una classe, può assumere una forma sintetica in cui i numeri su cui si opera ricevono il significato di cardinale, ed una forma più analitica dove essi sono interpretati come ordinali: nella quale si rende esplicita l'applicazione del teorema d'invarianza del § 16.

Digitized by Google

§ 19. L'addizione. — L'addizione di due o più numeri, pensati come cardinali, si lascia definire nella maniera seguente.

Si considerino due o più classi finite senza elementi comuni:

$$(A) = (A_1\, A_2 \ldots\, A_a)$$
$$(B) = (B_1\, B_2 \ldots\, B_b)$$
$$(C) = (C_1\, C_2 \ldots\, C_c)$$

e si scriva:

$$a = \text{num.}\,(A), \quad b = \text{num.}\,(B), \quad c = \text{num.}\,(C) \ldots,$$

l'addizione o somma dei numeri a, b, c.... *è il numero degli oggetti della classe che si ottiene riunendo* (A), (B), (C).... :

$$a + b = \text{num.}\,(A + B)$$
$$a + b + c = \text{num.}\,(A + B + C)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Come già si è rilevato nel § 17, la possibilità (illimitata) dell'addizione implica un postulato esistenziale (esistenza di classi equivalenti senza elementi comuni ecc.) che abbiamo appunto denominato « *postulato esistenziale della somma* ».

Ora, gli assiomi logici che caratterizzano l'operazione del riunire conducono alle *proprietà fondamentali dell'addizione* dei numeri. Anzitutto, poichè la riunione di più classi è definita in modo simmetrico per riguardo alle classi addende, indipendentemente dal loro ordine: *l'addizione gode della proprietà commutativa*

$$a + b = b + a, \quad a + b + c = a + c + b \text{ ecc.}$$

Inoltre la proprietà associativa del riunire si traduce nella *proprietà associativa dell'addizione*:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) \text{ ecc.}$$

Invece di definire la somma facendo appello al significato dei numeri come cardinali (che implica il presupposto dell'invarianza del numero) si può ricondurci al loro significato primitivo come ordinali, ed allora il principio d'invarianza appare esplicitamente nella dimostrazione delle sue proprietà fondamentali.

Due serie perfette, senza elementi comuni,

$$A_1 A_2 \ldots A_a$$
$$B_1 B_2 \ldots B_b$$

Digitized by Google

si possono aggiungere, pensando gli elementi della seconda di seguito a quelli della prima, e si ottiene la serie perfetta

$$S = A_1 A_2 \ldots A_a B_1 B_2 \ldots B_b :$$

allora a + b *è il numero d'ordine di* B_b *in* S.

La somma $a + b + c$ viene definita analogamente e si ha, in modo immediato,

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c),$$

cioè la proprietà associativa.

Ma la *proprietà commutativa*

$$a + b = b + a,$$

esige qui una dimostrazione, perchè la definizione della somma dipende dall'ordine degli addendi. A tal uopo basta osservare che « *il numero d'ordine di* B_b *in* S *è uguale a quello di* A_1 *nella serie inversa* »: principio che è un semplice corollario dell' invarianza del numero.

§ 20. **La sottrazione e lo zero.** — La *sottrazione* di due numeri

$$c = a - b$$

si definisce come *operazione inversa* dell' addizione, proponendosi la risoluzione dell'equazione

$$a = b + x,$$

che dà, ove la sottrazione sia possibile,

$$x = c = a - b.$$

Per interpretare la sottrazione pei numeri cardinali a, b, si deve supporre

$$a = \text{num.}\,(A),\ b = \text{num.}\,(B),$$

allora fra le due classi (A), (B) si può sempre porre una *corrispondenza similare* (univoca in un senso, ma non invertibile) in cui ad una delle due classi corrisponde biunivocamente una *parte* dell'altra, mentre gli elementi della parte *residua* non hanno corrispondente

Digitized by Google

nella prima; precisamente a (B) corrisponde una parte di (A) se $(A) \geq (B)$ ed invece ad (A) una parte di (B) se $(B) \geq (A)$. *La sottrazione delle due classi* (A) (B) *è la costruzione della classe determinata come residuo della corrispondenza similare fra* (A), (B). È inteso che questo residuo è *la classe nulla* se (A) (B) sono equivalenti.

La classe nulla (O) è definita comprensivamente in modo unico, perchè di ogni elemento A si nega che esso appartenga ad (O), perciò se

$$(A) = (B) = (C) \ldots,$$

si ha

$$(O) = (A - A) = (B - B) = (C - C) \ldots.$$

Ora, *dati due numeri disuguali* a, b (corrispondenti alle classi (A), (B)) *vi è sempre uno ed uno solo di essi che è maggiore dell'altro* (minore) *e può ritenersi come somma di questo con un terzo numero*; in altre parole *è possibile la sottrazione* a — b *o* b — a. Si può togliere il *caso d'eccezione* corrispondente all'uguaglianza dei due numeri, introducendo il *numero* 0 come numero cardinale della classe nulla, e quindi ponendo per definizione

$$a + 0 = a, \; 0 = a - a = b - b = \ldots.$$

Le proprietà della somma ci danno subito le seguenti, dove si suppongano possibili (pur conducendo a 0) le sottrazioni indicate:

$$a + (b - c) = (a + b) - c$$
$$a - (b + c) = (a - b) - c$$
$$a - (b - c) = (a - b) + c.$$

Occorre notare che, qualora, invece che a numeri cardinali, ci si riferisca a numeri ordinali, la sottrazione $a - a$ riesce impossibile nella serie

$$1, 2, 3, \ldots a \ldots$$

Ma se si vuole ristabilire la corrispondenza ordinata fra la serie dei numeri cardinali e quella degli ordinali, quando s'includa nella prima « il numero degli oggetti della classe nulla » si è condotti a premettere all' 1, un nuovo numero « lo 0 ». Allora si ha la serie

$$0, 1, 2 \ldots a \ldots$$

Digitized by Google

in cui il numero a non è più il numero d'ordine dell'elemento che porta questo nome, ma il *numero d'ordine* dell'elemento stesso *a contare dopo lo* 0, preso come origine della numerazione.

§ 21. **La moltiplicazione.** — La moltiplicazione di due o più numeri cardinali si può definire (con CANTOR e CAPELLI) nel seguente modo:

Si abbiano due o più classi *non nulle*:

$$(A) = (A_1 \ldots. A_i \ldots. A_a),$$
$$(B) = (B_1 \ldots. B_r \ldots. B_b)$$
$$(C) = (C_1 \ldots. C_s \ldots. C_c) \text{ ecc.}$$

Formiamo la classe

$$(AB) = (\ldots. A_i B_r \ldots.)$$

che ha come elementi le coppie formate associando un qualsiasi elemento di (A) con un qualsiasi elemento di (B).

Il prodotto dei due numeri a, b, *diversi da* 0, *si definisce ponendo*

$$ab = \text{num. } (AB).$$

Analogamente

$$abc = \text{num. } (ABC),$$

dove la classe (ABC) contiene le terne $A_i\, B_r\, C_s$ ecc.

La moltiplicazione delle classi è definita in modo simmetrico, quindi *vale per il prodotto di più numeri la proprietà commutativa*:

1) $$ab = ba, \; abc = bac \text{ ecc.}$$

Inoltre l'associazione degli elementi $A_i\, B_r\, C_s$ può esser fatta associando prima $A_i\, B_r$ e poi C_s alla coppia così ottenuta, quindi *vale la proprietà associativa*:

2) $$abc = (ab)c.$$

Si ha poi *la proprietà distributiva*:

3) $$(a + b)\, c = ac + bc,$$

quindi:

$$(a + b + c)\, d = ad + bd + cd \text{ ecc.}$$

Infatti combinando per moltiplicazioni le classi $(A + B$ e (C) si ottiene appunto la riunione delle classi (AC) e (BC) ecc.

Digitized by Google

Notiamo infine che:

4) $$a.1 = a.$$

Infatti moltiplicando la classe (A) per un'altra contenente un solo elemento, si dà luogo ad una classe i cui elementi corrispondono biunivocamente a quelli di (A).

Ora, nella dimostrazione delle proprietà fondamentali del prodotto (come per la somma) si può rendere esplicita l'applicazione del principio d'invarianza del numero, interpretando i numeri su cui si opera come ordinali anzichè come cardinali.

Invero si considerino le classi ordinate

$$(A) = (A_1\, A_2 \,....\, A_a)$$
$$(B) = (B_1\, B_2 \,....\, B_b)\,;$$

la classe (AB) può essere ordinata in guisa da costituire la serie (perfetta)

$$S = A_1B_1, A_2B_1 \,....\, A_aB_1, A_1B_2, A_2B_2 \,....\, A_aB_2 \,....\, A_1B_b, A_2B_b \,....\, A_aB_b,$$

ed allora il *prodotto* ab *designa il numero d'ordine dell'ultimo elemento*, $A_a\, B_b$, *in* S. Questa definizione si riconduce alla forma consueta: *il prodotto* ab *è la somma di* b *numeri uguali ad* a.

Quindi, per stabilire la proprietà commutativa del prodotto, basta osservare che la S può essere ordinata come segue:

$$A_1B_1,\ A_1B_2....A_1B_b,\ A_2B_1,\ A_2B_2....A_2B_b....A_aB_1,\ A_aB_2....A_aB_b,$$

ed allora il numero d'ordine dell'ultimo elemento è $b\,a$; il principio d'invarianza dà dunque

$$a\,b = b\,a.$$

È interessante avvertire che questa dimostrazione non fa che esprimere in forma logicamente precisa il ragionamento consueto dei trattati, in cui si scrive:

$$(a\,b) = (\underbrace{a + a + ... + a}_{b}) =$$

$$= (\underbrace{1 + 1 .... + 1}_{a}) + (\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{a}) + ... + \underbrace{(1 + 1 + ... + 1)}_{b}\ \underbrace{}_{a} =$$

$$= (\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{b}) + (\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{b}) + ... + \underbrace{(1 + 1 + ... + 1)}_{a}\ \underbrace{}_{b} =$$

$$= \underbrace{b + b + ... + b}_{a} = b\,a.$$

Digitized by Google

Dopo ciò passiamo a stabilire la *proprietà distributiva* del prodotto:

$$(a + b)\, c = ac + bc.$$

A tal uopo partiamo dalle serie

$$A_1 A_2 \ldots\ldots A_a,\ B_1 B_2 \ldots\ldots B_b,\ C_1 C_2 \ldots\ldots C_c;$$

formiamo le due serie

$$A_1C_1,\ \ldots\ldots A_aC_1,\ B_1C_1,\ \ldots\ldots B_bC_1,\ A_1C_2 \ldots\ldots A_aC_2,\ B_1C_2 \ldots\ldots B_bC_2,$$
$$\ldots\ldots A_1C_c, \ldots\ldots A_aC_c, B_1C_c \ldots\ldots B_bC_c.$$

$$A_1C_1 \ldots\ldots A_aC_1,\ A_1C_2 \ldots\ldots A_aC_2,\ \ldots\ldots A_1C_c \ldots\ldots A_aC_c,\ B_1C_1 \ldots\ldots B_bC_1,$$
$$\ldots\ldots B_1C_c \ldots\ldots B_bC_c$$

che sono costituite cogli stessi elementi presi in diverso ordine; nella prima l'ultimo elemento ha il numero d'ordine $(a + b)\, c$, nella seconda $ac + bc$, e dunque resulta

$$(a + b)\, c = ac + bc.$$

Più in generale si avrà

$$(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n)\, b = a_1 b + a_2 b + a_n b.$$

Infine, la proprietà associativa del prodotto

$$(ab)\, c = a\, (bc)$$

resulta immediatamente in modo sintetico dalla formazione della serie corrispondente $A_t B_r C_s \ldots$, e d'altronde si deduce analiticamente dalle altre due proprietà, riferendosi alla definizione di $a\, b$ come somma di b addendi uguali ad a; si avrà invero

$$(ab)c = (ac)b,$$

e quindi

$$(ab)c = (ca)b = (cb)a = a(cb) = a(bc).$$

Innanzi di terminare questo paragrafo noteremo che, dalle proprietà stabilite per il prodotto, segue la formula

$$a\, (b - c) = ab - ac,$$

giacchè, posto $b - c = d$, si ha $ab = a(c + d) = ac + ad$.

Digitized by Google

Questa formula estesa convenzionalmente al caso $b = c$, conduce alla *definizione del prodotto di due numeri di cui uno* (almeno) *sia uguale a* 0:

5) $$a\,0 = 0;$$

d'accordo anche colla formula

$$0a = 0 + 0 + \ldots. = 0.$$

Qui conviene notare esplicitamente che — secondo la definizione sintetica data innanzi — il prodotto di due numeri diversi da 0 è sempre un numero diverso da 0, e così: *Condizione necessaria e sufficiente per l'annullarsi d'un prodotto è l'annullarsi di uno* (almeno) *dei fattori.*

§ 22. **Fondazione dell'aritmetica nel sistema induttivo.** — Indichiamo ora come si pongano le definizioni e dimostrazioni delle proprietà fondamentali dell'Aritmetica sulla base del principio d'induzione, cioè nell'indirizzo di GRASMANN-DEDEKIND-PEANO.

Assumiamo la serie dei numeri N:

$$0,\ 1,\ 2\ldots.\ n\ldots.$$

richiamando le sue proprietà elementari 1).... 5) del § 17, e ponendo per definizione $suc\ a = a + 1$.

Ecco in breve l'ordine delle proposizioni elementari che qui si stabiliscono.

SOMMA. — *Definizione induttiva* di $a + b$ in base alle condizioni iniziali:

$$a + 0 = a$$
$$a + (b + 1) = (a + b) + 1.$$

Si tratta di provare che queste condizioni determinano un'operazione in virtù della quale dati due numeri a, b resta definito un numero $a + b$, e poi di stabilire le proprietà associativa e commutativa di quell'operazione.

Al primo scopo si osserva che la proposizione « $a + b$ è un N » è vera per $b = 0$, e dall'ipotesi

$$a + b = N$$

segue $$a + (b + 1) = N + 1$$

quindi induttivamente la proposizione anzidetta risulta dimostrata.

Digitized by Google

Proprietà associativa:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Si dimostra induttivamente perchè:

$$(a + b) + 0 = a + (b + 0),$$
$$(a + b) + 1 = a + (b + 1),$$

e dall'ipotesi

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

segue

$$(a + b) + (c + 1) = a + \{(b + c) + 1\} = \\ = a + \{b + (c + 1)\}.$$

Proprietà commutativa:

$$a + b = b + a.$$

Dimostrazione induttiva in due tempi:

$$0 + 0 = 0,$$

e da

$$0 + a = a$$

segue

$$0 + (a + 1) = (0 + a) + 1 = a + 1,$$

quindi

$$0 + a = a;$$

ora si ha

$$0 + a = a + 0,$$

e da

$$b + a = a + b$$

segue

$$(b + 1) + a = a + (b + 1)$$

Infatti si ha:

$$\begin{aligned}(b + 1) + a &= b + (1 + a) \\ &= b + (a + 1) \\ &= (b + a) + 1 \\ &= (a + b) + 1 \\ &= a + (b + 1)\end{aligned}$$

quindi si ha induttivamente

$$b + a = a + b.$$

Digitized by Google

NOTA. — Questa proprietà non sussiste pei transfiniti di CANTOR; invero

$$1 + \omega = 2 + \omega = \ldots = \omega$$

e non

$$1 + \omega = \omega + 1 \text{ ecc.}$$

SOTTRAZIONE. — Se

$$a + c = b + c$$

si deduce

$$a = b.$$

Dimostrazione induttiva partendo dal fatto che $a + 0 = b + 0$ porta $a = b$.

PRODOTTO. — *Definizione induttiva* di ab in base alle condizioni iniziali

$$a0 = 0$$
$$a(b + 1) = ab + a.$$

Segue

$$a1 = a, \quad a2 = a + a.$$

Si prova in generale che

$$ab \text{ è un } N,$$

induttivamente, perchè la proposizione vale per $b = 0$, e dall'essere

$$ab = N$$

si deduce

$$a(b + 1) = N + a.$$

Proprietà distributiva:

A destra

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Si ha

$$a(b + 0) = ab + a0$$

e da

$$a(b + c) = ab + ac$$

segue

$$a(b + \{c + 1\}) = a(\{b + c\} + 1)$$
$$= a(b + c) + a = (ab + ac) + a = ab + a(c + 1),$$

quindi induttivamente.

Digitized by Google

A sinistra

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Dimostrazione analoga.

Proprietà commutativa :

$$ab = ba.$$

Dimostrazione induttiva in tre gradi.

Anzitutto

$$00 = 0, \; 0.1 = 0,$$

e da

$$0a = 0$$

segue

$$0(a + 1) = 0a + 0,$$

quindi induttivamente

$$0a = 0 = a0.$$

Ora

$$1 . 0 = 0$$

e da

$$1a = a1$$

segue

$$1(a + 1) = (a + 1)1$$

quindi induttivamente

$$1a = a1.$$

Finalmente da

$$ba = ab$$

si deduce

$$(b + 1)a = ba + 1a = ab + a1 = a(b + 1)$$

e perciò induttivamente

$$ba = ab.$$

Proprietà associativa :

$$(ab)c = a(bc).$$

Si ha

$$(ab)0 = 0 = a(b0)$$

e da

$$(ab)c = a(bc)$$

Digitized by Google

segue
$$\begin{aligned} ab(c+1) &= (ab)c + ab = \\ &= a(bc) + ab = a(bc + b) = \\ &= a\{b(c+1)\}, \end{aligned}$$

quindi induttivamente

$$(ab)c = a(bc).$$

Annullamento del prodotto. — Se

$$ab = 0 \quad \text{e} \quad a \neq 0$$

si ha

$$b = 0.$$

DIVISIONE. — Se

$$ac = bc \quad \text{e} \quad c \neq 0.$$
$$a = b.$$

Parte seconda. — ***I numeri razionali.***

I. — ESTENSIONI DEL CONCETTO DI NUMERO.

§ 23. Introduzione storica. — I numeri interi trovano un'estensione naturale e necessaria nelle *frazioni*, quando si adoperano per la misura di grandezze, a significare quante volte una grandezza data contenga una certa unità. Sotto questo aspetto non si potrebbe dubitare che i numeri frazionari siano stati in qualche modo conosciuti dall'antichità più remota, se anche mancassero testimonianze positive, come quelle che si desumono dal PAPYRUS RHIND (attribuito allo scriba egiziano AHMES, circa 1700 a. C. e interpretato dall'EISENLOHR (1)): dove si trova una *tavola d'addizione*, che insegna a trasformare frazioni con denominatori diversi in altre con dato denominatore, in guisa da ottenere la somma.

Qui basterà aggiungere che il nostro simbolo di frazione ordinaria sembra provenire dagli Arabi e fu divulgato da LEONARDO PISANO nel *Liber Abaci* (1202).

Ora, la misura delle grandezze conduce, oltre i numeri frazionari, alla considerazione di *numeri irrazionali* o rapporti di

(1) *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypten*, Lipsia, 1877.

Digitized by Google

grandezze incommensurabili; e poichè la scoperta di segmenti incommensurabili appartiene alla scuola pitagorica, si può ritenere che anche quest'estensione del concetto (se pure non ancora del « nome ») di numero risalga ai Greci: ma di ciò discuteremo più avanti nella Parte terza del presente Articolo.

Più tardi appaiono invece, nella storia, i *numeri negativi*, che sembrano trarre origine dal progresso formale del calcolo algebrico. Già, nel periodo ellenistico, DIOFANTO ha avuto luogo di osservare che quando si sviluppa il prodotto $(a - b)(c - d)$, si deve porre $(-b)(-d) = +bd$, e — d'altra parte — il matematico indiano BRAHMEGUPTA (secolo VI dell'e. v.) porge alcune regole pratiche per l'addizione di crediti e debiti; ma tracce più definite d'un vero calcolo con numeri negativi si trovano solo nel matematico indiano BHASKARA (n. 1114), che distingue il valore positivo e negativo delle radici quadrate e scrive indifferentemente, in una somma, i numeri negativi prima dei positivi. Forse dagl' Indiani provengono gli accenni ai numeri negativi che s'incontrano presso gli autori Arabi.

I numeri negativi compaiono in Europa soltanto verso la metà del XV o nel XVI secolo presso matematici come PACIOLI, CARDANO, STIEFEL, che li designavano *aestimationes falsae aut fictae*, o *numeri surdi*.

Da questi stessi nomi appare la repugnanza che non può a meno di suscitare il numero negativo a chi cerchi in esso un'estensione del numero cardinale (o del concetto di grandezza) anzichè del numero ordinale.

Un uso più libero dei numeri negativi ricorre in TH. HARRIOT (1600) e in DESCARTES, che colla rappresentazione analitica dei punti del piano (se pure non ancora espressa nella forma attuale (1)) doveva preparare la più larga interpretazione estensiva dei numeri ordinali, quali *ascisse* di punti o estremi di *segmenti orientati* sopra la retta. Quindi il concetto dei numeri negativi viene affermato esplicitamente da NEWTON nel cap. V dell'*Arithmetica universalis*: « Quantitates vel Affirmativae sunt, seu nihilo majores, vel Negativae, seu nihilo minores. Sic in rebus humanis possessiones dici possunt bona positiva, debita verum bona negativa.... Et ad eundem modum in Geometria, si linea

(1) Cfr. E. BOMPIANI, *Che cosa contiene la Géométrie di Cartesio?* « Periodico di Matematiche », 1921.

Digitized by Google

versus plagam quamvis ducta affirmativa habeatur, negativa erit quae versus plagam oppositam ducitur ».

Conviene aggiungere che, nella considerazione di matematici posteriori, non sempre i numeri relativi sono stati riguardati sotto l'aspetto di « quantità o grandezze orientate », ma spesso invece concepiti come « quantità da aggiungere o togliere » : così, nella scuola stessa di Newton, il MAC LAURIN, e in Francia LACROIX e CAUCHY (*Analogie algébrique*, 1821), preludendo alla moderna teoria astratta dei numeri relativi quali « operatori ».

Dal precedente esame resulta :

1) che le frazioni si sono introdotte naturalmente nell'Aritmetica per il loro significato *sintetico*, come misure, porgendo così un'interpretazione generale della « divisione » anche nel caso in cui il dividendo non riesca multiplo del divisore ;

2) che invece i numeri negativi traggono origine dalla convenienza *analitica* di usare in generale il simbolo della « sottrazione », anche quando il diminuendo è minore del diminutore. Tuttavia l'uso di tali numeri è parso primamente giustificato da un'interpretazione *sintetica*, in rapporto alla rappresentazione di « quantità orientate », sebbene anche il concetto di « quantità addittive e sottrattive » si sia rivelato sufficiente a conferire legittimità ai calcoli su numeri relativi.

Nella storia dell'immaginario (che viene illustrata dall'articolo di GIGLI nel vol. II di questa raccolta) si riscontra un analogo progresso d'idee. Il simbolo $\sqrt{-a}$ (con a positivo) si presenta nella formula di risoluzione delle equazioni cubiche con CARDANO e TARTAGLIA, e precisamente nel cosiddetto *caso irriducibile* corrispondentemente a soluzioni reali del problema geometrico, e di qui ha origine (con BOMBELLI) il calcolo sui numeri che noi diciamo immaginari o complessi. Ma la legittimità logica di tali sviluppi è stata riconosciuta universalmente solo quando ARGAND e GAUSS hanno pôrto la nota rappresentazione dei detti numeri, come indici dei punti del piano.

Tuttavia, per riguardo alle questioni concrete dell'*analisi applicata*, il caso degli immaginari si presenta diverso da quello dei numeri frazionari e negativi, giacchè le soluzioni immaginarie del problema, a differenza delle reali, restano il più delle volte prive di senso.

Questa circostanza genera naturalmente l'idea che l'interpre-

Digitized by Google

tazione sintetica (vettoriale) dei numeri complessi valga soprattutto a stabilire la possibilità logica di usare nei calcoli il simbolo $i = \sqrt{1-}$; onde il desiderio di giustificare *a priori* codesta possibilità, senza ricorso ad interpretazioni sintetiche, con un'esposizione analitica-formale della teoria, quale viene pôrta da HERMANN HANKEL (1): il quale, riprendendo una veduta già affacciata da G. PEACOCK (2), ha formulato in questa occasione il *principio di permanenza delle proprietà formali* delle operazioni, che stabilisce il criterio generale delle diverse estensioni del concetto di numero.

Al lume di questo principio ogni estensione consiste semplicemente:

1) nell'attribuire il nome di « numero » a simboli o complessi di simboli, che non rappresentino già numeri del campo dato, cui si possa conferire un significato qualsiasi;

2) e nel definire pei nuovi numeri le operazioni fondamentali dell'Aritmetica e il concetto d'uguaglianza, in guisa che *si conservino le proprietà formali delle operazioni* (dirette), che costituivano le regole di calcolo nel campo numerico ristretto.

Questa condizione acquista un significato preciso quando si enuncino le suddette proprietà formali che noi abbiamo riassunto nei §§ 19-22 e che sono, in generale, traducibili con *uguaglianze* (*non* con *disuguaglianze*).

HANKEL ha messo in opera l'applicazione del suo principio, costruendo una teoria analitica dei numeri complessi $\alpha + i\,\beta$, che vengono definiti, sostanzialmente, come coppie ordinate (α, β) su cui si opera colle regole di calcolo convenienti.

Più tardi, la tendenza aritmetizzante della scuola di Berlino, ha portato la costruzione di *teorie analitiche dei numeri fratti e negativi*, e si sono costruite, precisamente: una *teoria delle congruenze* (KRONECKER, l. c., 1887) e le *teorie delle coppie* (3) e *degli operatori* (4).

(1) *Theorie der complexe Zahlen*, Lipsia, 1867.

(2) *Symbolical Algebra*, Cambridge, 1845.

(3) O. STOLZ, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, Lipsia, 1885. J. TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, Parigi, 1886.

(4) C. MÉRAY, *Théorie élémentaire des fractions dégagée de toute considération impliquant soit la subdivision de l'unité abstraite, soit l'intervention des grandeurs.* « Nouvelles Annales de Mathématiques », 1889; *Les fractions et les quantités négatives*, Parigi, 1890; G. PEANO, *Aritmetica generale*, Torino, 1902.

Digitized by Google

§ 24. Osservazioni sulla teoria analitica. — Il rapido esame storico delle estensioni del concetto di numero, ci ha portato a distinguere, per ciascuna classe estesa, *teorie sintetiche* e *teorie analitiche*.

Lo scopo della teoria analitica dei numeri consiste nel giustificare l'*uso nel calcolo di formule* che, rispetto al concetto dato dei numeri naturali, sono *prive di senso*, come: $a - b$ per $a < b$, $\frac{a}{b}$ quando a non è multiplo di b, ecc.

Limitiamoci — per semplicità di discorso — alla teoria dei numeri fratti e negativi; lo scopo della teoria analitica di questi numeri si può ridurre più precisamente alla dimostrazione del seguente resultato:

Si operi nel calcolo algebrico (o aritmetico) fingendo sempre possibili le quattro operazioni: addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione, e supponendo formalmente le loro proprietà fondamentali (§§ 19-22); *se per tal modo, a partire da date uguaglianze fra numeri naturali, si deducono altre uguaglianze fra numeri naturali, quest'ultime sono legittimamente dedotte, comunque si sieno rappresentate nelle formule di passaggio delle operazioni impossibili, e quindi la deduzione sia avvenuta attraverso formule vuote di senso.*

Esempio. — Nel paese X sono nati, durante un anno, 6 uomini ogni 5 giorni, quanti uomini sono nati in tutto l'anno?

Si ha la proporzione

$$365 : 5 = x : 6,$$

che (resultando x intero) esprime un'uguaglianza fra numeri naturali. Trasformiamola scrivendo

$$x = 365 \cdot \frac{6}{5}$$

$$\frac{6}{5} = \left(1 + \frac{1}{5}\right)$$

$$x = 365 \left(1 + \frac{1}{5}\right) = 365 + \frac{365}{5} = 365 + 73 = 438.$$

Il valore di x così dedotto è quello stesso che si ottiene calcolando $\frac{365 \cdot 6}{5} = 73 \cdot 6$. E non pertanto eseguendo i calcoli nel primo modo siamo passati attraverso una formula assurda in sè, secondo

Digitized by Google

la quale si suppone sia nato — ogni giorno — un uomo e $\frac{1}{5}$ di uomo. Nessuno penserà che per giustificare il calcolo si debbano effettivamente frazionare gli uomini!

Ora si tratta di vedere in qual modo il resultato precedente possa essere stabilito in generale.

Anzitutto, di fronte al presentarsi di simboli d'operazioni impossibili, o non bene definite, si possono osservare due atteggiamenti opposti:

1) l'atteggiamento prudente e rigoroso che si arresta di fronte al simbolo privo di significato e ne rifiuta l'uso;

2) l'atteggiamento ardito del ricercatore che accorda fiducia al calcolo istituito su simboli non definiti e procede in esso, colla speranza di *scoprire* nuove relazioni — se pure non giustificate — che sarà facile di giustificare poi con metodi rigorosi.

Questa diversità d'atteggiamento divide per es. — nei suoi inizi — gli oppositori e i fautori del Calcolo infinitesimale, questi ultimi potendosi riunire sotto l'insegna di D'ALEMBERT « continuez, la foi viendra! »; e — più di recente — gli oppositori ed i fautori dell' « immaginario ».

Dal punto di vista logico, l'atteggiamento ardito del ricercatore può essere giustificato come l'accoglimento di un'*ipotesi di lavoro*. In tal senso il ricercatore sviluppa le conseguenze di un'ipotesi che — a volta a volta — si appresta a sottomettere ad un diretto controllo.

Ma, quando questo controllo riesce, senza eccezione, in un seguito di casi, si produce nelle menti una specie di *certezza pratica* che l'ipotesi adottata sia giusta; ed infatti se i vari tentativi sono apprezzati con cauto giudizio, se ne ha in un certo senso una *prova sperimentale*.

Fin qui siamo sul terreno della Logica. Ora bisogna fare i conti colla Psicologia!

Lo spirito umano aborre dal dubbio, e questo aborrimento si manifesta non solo come amore della verità più sicura, cioè come ricerca di mezzi di prova più rigorosi, ma anche come amore dell'illusione; così avviene che il successo parziale si scambia non di rado colla presunzione della vittoria definitiva, il resultato sperimentale col principio preteso *a priori*, la Fisica colla Metafisica.

Nel campo matematico di cui stiamo trattando, la certezza empirica sopra accennata, congiunta alla *superstizione del forma-*

Digitized by Google

lismo, conduce spesso ad un *sofisma*, più o meno apertamente dichiarato, che tien luogo di prova logica: *operando nel calcolo sopra dei simboli, ci è indifferente il significato concreto che questi possono ricevere compatibilmente colle proprietà formali del nostro sistema d'operazioni; quindi il processo formale è legittimo indipendentemente da codesto significato concreto e però anche se — durante il processo — si è fatto uso di simboli privi di senso.*

Questo sofisma compare travestito in varie teorie formali dei numeri fratti o negativi, che pure sembrano essere state diffuse in alcuni circoli di discepoli di WEIERSTRASS; dove s'introduce *per definizione* accanto all'unità $e = 1$ un'unità *opposta* e' tale che

$$e + e' = O, \quad e' = -1,$$

e accanto ad ogni numero naturale n un numero *contrario* $n' = \frac{1}{n}$, per modo che sia

$$n\,n' = 1.$$

E non si avverte che se e' ed n' non hanno ancora ricevuto un senso, *a fortiori* non hanno nemmeno senso la somma $e + e'$ o il prodotto $n\,n'$, resultati di operazioni sopra di essi!

Vi è qui un'assunzione implicita, cioè che *un simbolo rappresenti senz'altro un oggetto del pensiero logico.*

Nondimeno quest'assunzione si riconosce falsa in esempi volgari: si supponga per es. che sia lecito di operare, colle ordinarie regole di calcolo, sul simbolo $\frac{a}{0}$; si avrà allora

$$1 \,.\, 0 = 0 \qquad 2 \,.\, 0 = 0$$

$$\frac{0}{0} = 1 \qquad \frac{0}{0} = 2$$

$$1 = 2\ !$$

Questo semplice esempio (ed altri che si potrebbero trarre dalle serie divergenti o indeterminate ecc.) ci avverte che la giustificazione formale è insufficiente ad autorizzare l'uso di simboli corrispondenti ad operazioni impossibili, giacchè gli stessi principî del pensiero logico (identità, contraddizione) valgono solo per ciò che rappresenta un *possibile oggetto*, mentre un oggetto impossibile può dare origine ad una contraddizione intrinseca (esempi: limite d'una serie indeterminata, classe di tutte le classi, ecc.).

Digitized by Google

Ora vi è luogo a distinguere intorno alla *possibilità degli enti astratti*:

1) una possibilità (fisica,...) relativa a certe interpretazioni di altri enti da cui i dati dipendono, per es. $\frac{1}{3}$ è fisicamente impossibile se l'unità è l'uomo;

2) una *possibilità logica*, che spetta ad ogni concetto non contraddittorio.

Dopo ciò lo scopo della teoria analitica dei numeri negativi e fratti si può chiarire dicendo che essa si propone di: *mostrare la possibilità logica dei simboli* a — b, $\frac{a}{b}$, *in un sistema di enti e di operazioni che si suppone governato dalle proprietà fondamentali dell'Aritmetica dei numeri naturali.*

In qual senso possa stabilirsi una tale possibilità logica, verrà lumeggiato dalle considerazioni che seguono.

§ 25. **Rapporti fra la teoria analitica e la teoria sintetica.** — Per dimostrare la possibilità logica di un concetto astratto basta far vedere ch'esso può ricevere un'*interpretazione concreta*; in questo senso per es. si fa vedere che i numeri transfiniti di CANTOR sono logicamente possibili, ricorrendo alle serie di punti considerate al § 17.

Così per mostrare la possibilità logica di un oggetto, che soddisfi alle proprietà formali dei numeri e sia rappresentato dal simbolo $\frac{1}{3}$, basta supporre che la classe rispetto a cui si considerano i numeri 1, 2, 3.... sia formata di elementi divisibili in tre parti: in tal modo — nonostante l'impossibilità fisica di $\frac{1}{3}$ d'uomo — si conclude alla possibilità logica di $\frac{1}{3}$, per ciò che esiste $\frac{1}{3}$ di metro.

In generale si può dire che una teoria sintetica dei numeri fratti o negativi dimostra in questo senso la possibilità logica dei simboli $\frac{a}{b}$, $a - b$. Ma qui interviene un'*osservazione delicata.*

Si abbiano due diverse interpretazioni concrete del concetto di numero, per es.:

A) numero = numero d'uomini,
B) numero = numero di metri.

Digitized by Google

Supposto che il numero a non sia multiplo di b, il simbolo $\frac{a}{b}$ ha senso rispetto all'interpretazione B) mentre è privo di senso rispetto ad A). Ora l'uso dei numeri fratti $\frac{a}{b}$ può condurre ad alcune relazioni fra numeri naturali a, b,..., che risultano così dimostrate pei numeri concreti della classe B). Queste stesse relazioni aritmetiche potranno ancora ritenersi valevoli pei numeri della classe A) ?

In altre parole: la possibilità — relativa a certe interpretazioni concrete del numero — di estendere il campo dei numeri naturali, non potrebbe — per avventura — tradursi in un nuovo postulato dell'Aritmetica, da cui seguano, per la serie stessa dei numeri naturali, proprietà incompatibili con alcune speciali interpretazioni del numero ?

Se così fosse si sarebbe necessariamente condotti a distinguere *varie Aritmetiche*, in alcune delle quali il simbolo $\frac{a}{b}$ o $a - b$ potrebbe dar luogo ad una incompatibilità con certe proprietà dei numeri, e quindi rappresentare in questo senso (relativo) una impossibilità logica.

Prima di rispondere al dubbio critico sollevato dalle precedenti riflessioni, vogliamo porgere un esempio che valga a mostrare come esso debba ritenersi, *a priori*, logicamente fondato.

Si cerchi di fondare la Geometria del piano assumendo dall'intuizione alcuni postulati fondamentali relativi ai *punti* (elementi della classe « piano »), alle *rette* (classi di punti contenute nel piano), e ai *movimenti* del piano su se stesso (corrispondenze fra i punti del piano).

Supponiamo dunque di avere enunciato:

1) i postulati relativi alla determinazione di una retta per mezzo di due punti e all'intersezione di due rette (postulato d' EUCLIDE sulla unicità della parallela);

2) i postulati relativi all'ordine dei punti sulla retta, o dei raggi d'un angolo ecc., esclusa la continuità (Articolo Quinto);

3) i postulati che caratterizzano i *movimenti del piano su sè stesso*, a cui si riattacca la proposizione che « due triangoli aventi uguali due lati a due lati e *direttamente uguali* gli angoli compresi, sono uguali ».

Su queste basi si potrà edificare, *nel piano*, una teoria dell'uguaglianza (congruenza) dei triangoli, la quale tuttavia avrà

Digitized by Google

un contenuto più ristretto della teoria euclidea ordinaria. Infatti non ci è dato di dedurre che sono uguali due triangoli (inversamente uguali) la cui sovrapposizione esige un ribaltamento del piano, e quindi implica l'ipotesi che il piano sia contenuto in uno spazio a tre dimensioni.

La possibilità di questa estensione del piano si traduce qui in un nuovo postulato della Geometria piana, a cui si riattacca per es. la proprietà che « gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali fra loro ». Precisamente HILBERT ha provato che questo postulato è indipendente da 1) 2) 3), per modo che è possibile assegnare un'interpretazione concreta del concetto astratto di piano, definito dai postulati 1) 2) 3), dove non valga la proprietà degli angoli alla base del triangolo isoscele.

Questo esempio ha un significato logico generale:

La estendibilità di una classe di enti astrattamente definita, in rapporto a certe relazioni postulate in essa, può tradursi in qualche postulato essenzialmente nuovo che esprima una relazione degli enti **entro** *la classe data*, tale relazione essendo compatibile con alcune interpretazioni concrete dei supposti enti astratti e incompatibile con altre interpretazioni di essi.

Dopo ciò ritorniamo alla nostra Aritmetica. È possibile che vi siano diverse Aritmetiche dei numeri naturali, per modo che in qualcuna di esse sussistano relazioni compatibili coll'estensione del campo dei numeri, e in qualche altra vi siano relazioni incompatibili con una siffatta estensione?

A questa domanda si risponde:

No, il dubbio critico sollevato innanzi può essere rifiutato in base alla seguente considerazione, che si riattacca allo stesso processo di definizione dei numeri naturali (cardinali o ordinali):

Qualunque sia il significato concreto che vogliasi attribuire ai numeri delle due serie:

$A)$ $\quad 0, 1, 2, 3, \ldots. n$

$B)$ $\quad 0, 1, 2, 3, \ldots., \overline{n}$

si può sempre porre fra le due serie una *corrispondenza ordinata* $n = \overline{n}$, la quale trasforma la somma $m + n$ in $\overline{m} + \overline{n}$, il prodotto mn in $\overline{mn}$ ecc.; mediante questa corrispondenza tutte le proprietà dei numeri $A)$ in ordine alle operazioni fondamentali si traducono

Digitized by Google

in proprietà analoghe dei numeri B), e viceversa, quindi *le due serie di numeri godono sempre delle stesse proprietà aritmetiche.*

Vi è dunque *una sola Aritmetica dei numeri naturali*, l' unicità dell'Aritmetica derivando dal modo di costruzione dei numeri, come enti astratti che rappresentano le corrispondenze possibili fra classi o serie d'oggetti.

Pertanto se l' uso incondizionato dei simboli $a - b$, $\frac{a}{b}$ viene giustificato per riguardo ad una particolare interpretazione concreta dei numeri naturali $a, b, \ldots$, esso risulta parimente giustificato, come possibilità logica, per riguardo ad ogni altra interpretazione concreta dei numeri. Cioè: *la teoria analitica dei numeri negativi e fratti può esser fondata ricorrendo ad una qualsiasi teoria sintetica di essi.*

Si può anche dire che ogni teoria analitica dei numeri negativi e fratti è (astrattamente parlando) una teoria sintetica, in quanto raggiunge il suo resultato fondamentale colla costruzione di una serie di enti, comprendente la serie dei numeri naturali; per quanto la serie estesa venga qui definita senza alcun riguardo all' *uso ordinario* dei numeri negativi e fratti. Ma — dal punto di vista filosofico della teoria della conoscenza — vi è fra la teoria analitica e la teoria sintetica questa differenza importante: *la teoria sintetica dei numeri negativi o fratti* ecc. *si basa sopra postulati, in quanto suppone una realtà — o la rappresentazione concettuale di una realtà — esterna, a cui i nuovi numeri si riferiscono; invece la teoria analitica porge una costruzione puramente logica dei numeri estesi, a partire dalla serie dei numeri naturali che esclusivamente si suppone data*; qui i numeri estesi non s' introducono *mediante postulati*, ma mediante *definizioni* o *convenzioni*.

Perciò la teoria sintetica — più chiara ed interessante dal punto di vista fisico — è senz'altro preferita dagli empiristi, fautori dell'*Aritmetica a posteriori*, laddove la teoria analitica risponde al punto di vista dei fautori dell'*Aritmetica a priori*.

II. — Teorie sintetiche.

§ 26. **I numeri negativi.** — Dal punto di vista sintetico, il concetto di numero negativo non si presenta come estensione del numero cardinale, ma soltanto del *numero ordinale*.

Digitized by Google

Infatti i numeri negativi s' introducono, accanto ai *positivi*, a costituire la classe più estesa dei *numeri con segno* o *numeri relativi*, per designare il posto (numero d'ordine) degli oggetti di una serie che procede illimitatamente non solo da ogni elemento ad un successivo, ma anche (in senso opposto) da ogni elemento ad un precedente.

Il modo più semplice di costruire una serie siffatta, consiste nel riunire due serie

$A)$ $\quad 1, 2, 3 \ldots. n \ldots.$
$A')$ $\quad 1', 2', 3' \ldots. n' \ldots.,$

convenendo che gli elementi di A') succedano a quelli di A) nell'ordine inverso all'ordine di successione 1, 2, 3... , per modo che

1′ preceda 1,
2′ » 1′ e così via;

si ottiene per tal modo la serie

$$\ldots. 4', 3', 2', 1', 1, 2, 3, 4 \ldots.$$

il cui ordine designeremo brevemente usando delle espressioni: *a destra* e *a sinistra*.

I numeri d'ordine relativi agli elementi di questa serie danno luogo alla possibilità illimitata dell'addizione e della sottrazione, l'addizione essendo definita dal punto di vista ordinale.

Per $b = 1, 2, 3 \ldots.$:

$a + b$ è il numero d'ordine dell'elemento che si trova al posto b dopo a a destra (nel verso della serie);

$a - b$ è il numero d'ordine dell'elemento che si trova al posto b dopo a a sinistra (nel verso opposto a quello della serie);

Per $b' = 1', 2', 3' \ldots.$:

$a + b'$ è il numero d'ordine dell'elemento che si trova al posto b' dopo a a sinistra;

$a - b'$ è il numero d'ordine dell'elemento che si trova al posto b' dopo a a destra. E ciò comunque a appartenga alla serie 1, 2, 3 .... o alla 1′, 2′, 3′ .... .

In conseguenza si può porre

$$1' = 1 - 1 = 0,$$
$$2' = 0 - 1,$$
$$3' = 0 - 2 \ldots.,$$

Digitized by Google

mentre

$$1 = 0 + 1$$
$$2 = 0 + 2$$
$$3 = 0 + 3 \ldots\ldots$$

Quindi, tralasciando la ripetizione del simbolo 0, *i numeri d'ordine degli elementi della serie vengono rappresentati dai numeri con segno* :

$$\ldots\ldots - 3, \; - 2, \; - 1, \; 0, \; + 1, \; + 2, \; + 3 \ldots\ldots ;$$

si ha allora :

$$+ a + (+ b) = + (a + b)$$
$$+ a + (- b) = + (a - b) \qquad (a > b)$$

oppure

$$= - (b - a) \qquad (b < a)$$
$$+ a - (+ b) = + a + (- b)$$
$$+ a - (- b) = + (a + b)$$
$$- a + (+ b) = + b + (- a)$$
$$- a + (- b) = - (a + b)$$
$$- a - (+ b) = - a + (- b)$$
$$- a - (- b) = - a + (+ b) ;$$

formule che contengono le regole ordinarie della somma algebrica.

L'addizione e la sottrazione resultano così illimitatamente possibili, e vengono soddisfatte la proprietà commutativa e associativa.

NOTA. — Un punto degli sviluppi precedenti merita un'osservazione particolare : i numeri a, a' delle due serie A) A') non vengono rappresentati simmetricamente dai numeri con segno, perchè

$$a = + a,$$
$$a' = - (a - 1).$$

Questo inconveniente si verifica per es. nella numerazione degli anni secondo l'*êra storica*, p. C. e a. C. ; gli anni a. C. vengono designati : l'anno precedente alla nascita di Cristo col numero 1 (a. C.), l'anno precedente a questo con 2 (a. C.) ecc. Ne segue per es. che la differenza fra due avvenimenti relativi ad uno stesso mese dell'anno n p. C. e dell'anno n a. C. è $2n - 1$ (e non $2n$) ; così in particolare gli anni bisestili che si succedono (ogni 4 anni) coi numeri d'ordine 4, 8 ...., per gli anni p. C., per quelli a. C. portano i numeri d'ordine 1, 5, 9....

Digitized by Google

Tale circostanza diventa specialmente pregiudizievole alla brevità dei calcoli degli astronomi, i quali appunto da ciò sono stati tratti a modificare la cronologia ordinaria della storia antecristiana, indicando con 0 l'anno che termina colla nascita di G. C., con 1 l'anno precedente ecc.: gli anni a. C. dell'*êra astronomica* portano dunque un numero d'ordine che differisce di un' unità da quello relativo all'êra storica.

L' inconveniente testè indicato nella formazione della serie corrispondente ai numeri con segno, si elimina in generale, se in luogo delle serie A) A') comincianti dal numero 1, si riuniscono in modo analogo due serie comincianti collo 0:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots.$$
$$0',\ 1',\ 2',\ 3'\ \ldots.$$

facendo però coincidere gli elementi 0, 0'. Allora

$$\ldots.\ 2' = -2,\ 1' = -1,\ 0 = 0',\ 1 = +1,\ 2 = +2\ \ldots.$$

L'addizione e la sottrazione dei numeri con segno vengono definite insieme al processo medesimo di definizione di codesti numeri. Per *estendere la moltiplicazione* si terrà ferma la definizione ordinaie

$$ab = \underset{1}{a} + \underset{2}{a} + \ldots. + \underset{b}{a},$$

anche nel caso in cui (essendo sempre b positivo) a sia negativo; si porrà quindi

$$(-a)b + -ab.$$

Dopo ciò per conservare la proprietà commutativa si dovrà porre

$$a(-b) = -ab,$$

e, affinchè questa formula sia valida anche per a negativo:

$$(-a)(-b) = ab.$$

Risultano quindi soddisfatte tutte le proprietà fondamentali della moltiplicazione.

Digitized by Google

§ 27. La serie dei numeri relativi caratterizzata da postulati. — In luogo di partire da due serie

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3 \ldots.$$
$$0', \quad 1', \quad 2', \quad 3' \ldots.$$

per costruire la serie illimitata nei due versi

$$\ldots. 3', \quad 2', \quad 1', \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots.$$

che corrisponde ai numeri con segno, è conforme al punto di vista sintetico di presupporre data quest'ultima serie illimitatamente estesa nei due versi opposti. Allora si è condotti a surrogare il sistema di postulati che caratterizza la serie numerata dei numeri naturali con un *sistema di postulati che caratterizza senz'altro le serie che si possono porre in corrispondenza ordinata colla serie dei numeri relativi:* da cui questi numeri nascono per astrazione.

A tale scopo porremo la seguente

Definizione. — Una serie si dice *quasi ben ordinata* se ogni parte di essa, costituita da elementi successivi ad un elemento qualsiasi, ammette un *primo* elemento.

Si noti che la differenza intercedente fra una serie quasi ben ordinata e una serie ben ordinata, è la mancanza di un primo elemento della serie totale.

Teorema. — *Una serie* S, *in corrispondenza ordinata colla serie dei numeri relativi*

$$\ldots. -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \ldots.$$

è caratterizzata dalla condizione di essere quasi ben ordinata insieme all'inversa.

La numerazione di una tal serie dipende dalla scelta arbitraria dell'elemento che si fa corrispondere allo 0.

Sia S una serie che soddisfi alle condizioni enunciate. In S ogni elemento ha *un* successivo ed *un* precedente. Scelto in S un elemento che si faccia corrispondere a 0, designamo il suo successivo con 1, il successivo di 1 con 2 ecc.; similmente designamo il precedente di 0 con — 1, il precedente di — 1 con — 2 ecc. Per tal modo si costruisce entro S una serie S' corrispondente ordinatamente alla serie dei numeri relativi. Si tratta di far vedere che S' esaurisce S. Infatti, se così non fosse, ci sarebbe in S un primo elemento

Digitized by Google

dopo S', e questo non avrebbe un precedente immediato, oppure ci sarebbe un ultimo elemento fra quelli che precedono S' e questo non avrebbe un successivo immediato.

NOTA 1ª. — Per stabilire una corrispondenza ordinata fra la serie S e i numeri relativi si ha la scelta arbitraria dell'*origine* 0.

Segue da ciò che la serie S ammette infinite *trasformazioni ordinate* in sè, dove all'elemento 0 si faccia corrispondere $\pm n$; queste rispondono all'operazione di somma:

$$y = x \pm n.$$

NOTA 2ª. — L'analisi dei postulati che caratterizzano la serie dei numeri relativi è stata svolta criticamente, in rapporto ad una completa teoria delle operazioni, da A. PADOA, il quale parte dalle relazioni di ordine (successivo di) e di simmetria (rispetto ad un elemento $= 0$).

Egli enuncia quindi, in una forma appropriata, il principio d'induzione che caratterizza qui la *minima serie quasi bene ordinata e infinitamente estesa nei due versi*, e riesce così ad adattare alle operazioni sui numeri relativi il sistema induttivo grassmanniano (§ 22).

La via che qui abbiamo indicato, ove s'introduce la considerazione della serie inversa, conduce d'altronde ad estendere il principio d'induzione posto per la serie dei numeri naturali. Il principio esteso costituisce un teorema dimostrabile, per es., nella forma seguente:

Se una classe contiene il numero 0, ed è tale che insieme ad ogni numero relativo debba appartenere ad essa il suo successivo e il suo precedente, la classe C contiene tutti i numeri relativi.

§ 28. **I numeri fratti come rapporti di grandezze commensurabili.** — I numeri fratti $\frac{a}{b}$ si possono far nascere da un'estensione dei numeri cardinali o dei numeri ordinali: soltanto nel primo caso occorre limitarsi ai numeri assoluti che s'identificano coi positivi.

L'osservazione che dà origine ai numeri fratti cardinali è la seguente: nella costruzione dei numeri cardinali

$$1, \quad 2 = 1 + 1, \quad 3 = 1 + 1 + 1 \ldots.$$

Digitized by Google

si può supporre che l'oggetto designato coll'unità sia esso stesso una classe e possa quindi considerarsi come una somma di *b unità di 2° ordine*:

$$1 = 1_2 + 1_2 + \dots + 1_2.$$

Allora il numero $\frac{a}{b}$ designa semplicemente la somma di a unità di 2° ordine.

In realtà occorre considerare accanto alle frazioni $\frac{a}{b}$ anche frazioni come $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{d}$ ecc. e ciò illimitatamente, sicchè l'ipotesi che l'*unità primitiva sia una somma di unità inferiori*, deve essere modificata progressivamente in corrispondenza a nuovi denominatori. Se infine si vuole esprimere il contenuto dell'ipotesi più generale che corrisponde all'integrità dei numeri fratti, si è condotti a determinare l'oggetto unità della classe primitiva come una *grandezza divisibile*. Da questo punto di vista *i numeri fratti s'introducono come rapporti in un sistema di grandezze commensurabili.*

Occorre perciò postulare le relazioni fondamentali di *uguaglianza* e di *somma* che caratterizzano, nel modo più generale, il concetto di un tale sistema.

Si abbia un sistema di enti (A, B, C....) i quali si trovino distribuiti in classi per mezzo di una relazione riflessiva simmetrica e transitiva (*uguaglianza*), enti uguali appartenendo ad una medesima classe. Gli astratti di tali enti, rispetto all'uguaglianza considerata, costituiscono un *sistema di grandezze commensurabili*, se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1) Esiste un'operazione univoca, la *somma*, che a due grandezze A, B fa corrispondere *una* grandezza $A + B$ dello stesso sistema.

Quindi data una grandezza A vi è nel sistema una grandezza *multipla* secondo n:

$$nA = A + A + \dots + \underset{n}{A}.$$

2) Date due grandezze A, B avviene sempre uno e uno solo fra i tre casi seguenti:

$$A = B,$$
$$A = B + C, \text{ cioè } (A > B),$$
$$B = A + C, \text{ cioè } (A < B).$$

Digitized by Google

3) La somma gode delle proprietà commutativa e associativa:

$$A + B = B + A,$$
$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad (= A + B + C).$$

4) Essendo n un qualsiasi numero intero e positivo ed A una grandezza del sistema, esiste nel sistema stesso *una* grandezza

$$B = \frac{A}{n}$$

tale che

$$nB = A.$$

(*Divisibilità* delle grandezze).

5) Date, nel sistema, due grandezze qualsiasi A, B esiste sempre nel sistema una terza grandezza C di cui entrambe sono multiple:

$$A = nC, \quad B = mC.$$

(Naturalmente A e B sono multiple anche di $\frac{C}{p}$. Si dimostra che il noto processo euclideo delle divisioni successive conduce ad una grandezza C che è massima fra tutte quelle di cui A, B sono multiple, ed ogni altra grandezza di cui A e B siano multiple risulta allora summultipla di C).

Si noti che per il postulato 1), se

$$A = A', \quad B = B'$$
$$A + B = A' + B'$$

ed

$$nA = nA';$$

per il postulato 4), se

$$A = A'$$

anche

$$\frac{A}{n} = \frac{A'}{n}.$$

In base ai suddetti postulati, definiremo il *numero fratto*

Digitized by Google

$\frac{m}{n}$, *rapporto* $B : A$ *di due grandezze* del sistema, dicendo che il rapporto $B : A$ è $\frac{m}{n}$ quando, posto

$$C = \frac{A}{n} \text{ e quindi } A = nC,$$

sia

$$B = mC \ (= \frac{m}{n} A).$$

Questo rapporto dicesi anche la *misura* di B rispetto ad A, presa come *unità*.

Per definizione, presa un'altra grandezza D summultipla di A e B per cui

$$A = qD, \quad B = pD,$$

si ha

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}.$$

In tal caso, ponendo

$$C = rE, \quad D = sE,$$

si trova

$$A = nrE = qsE.$$
$$B = mrE = psE,$$

e perciò

$$nr = qs, \quad mr = ps,$$

quindi

$$qmrs = pnrs,$$

e

$$qm = pn.$$

Viceversa, se

$$qm = pn,$$

posto,

$$A = nC, \quad B = mC$$
$$A = qD, \quad B' = pD,$$

e come innanzi,

$$C = rE, \quad D = sE \qquad \text{(post. 6)}$$

si deduce

$$A = nrE, \quad A = qsE,$$

quindi (post. 4)

$$nr = qs;$$

Digitized by Google

ma poichè

$$qmrs = pnrs,$$

seguo

$$mr = ps,$$
$$B = mrE, \quad B' = psE$$
$$B = B',$$

cioè, per definizione,

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}.$$

In particolare resulta di qui:

$$\frac{m}{n} = \frac{mr}{mr}.$$

Quando il numeratore è multiplo del denominatore i numeri fratti si riducono al tipo $\frac{m}{1}$, e s'identificano cogl'interi m, che esprimono i rapporti $mA : A$:

$$\frac{m}{1} = m.$$

Ora si possono definire le operazioni sui numeri fratti:

1) La *somma* di due numeri fratti

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$$

corrisponde alla somma delle due grandezze da essi misurate.

Poniamo

$$B = \frac{m}{n} A, \quad C = \frac{p}{q} A,$$
$$B + C = D = \frac{r}{s} A,$$

sarà

$$\frac{r}{s} = \frac{m}{n} + \frac{p}{q};$$

ma

$$\frac{m}{n} = \frac{mq}{nq}, \quad \frac{p}{q} = \frac{np}{nq},$$

Digitized by Google

sicchè, posto

$$\frac{A}{nq} = E,$$

$$B = mqE, \quad C = npE$$

$$D = B + C = (mq + np)E,$$

quindi

$$\frac{r}{s} = \frac{mq + np}{nq}.$$

2) Per definire il *prodotto* di due numeri fratti $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$, si è condotti ad estendere la definizione del prodotto di due numeri cardinali (§ 21) mercè le considerazioni che seguono.

Consideriamo le *coppie* non ordinate ((BC) = (CB)) formate colle grandezze del nostro sistema, si tratta di vedere come si possono definire per tali coppie la *somma* e una relazione — riflessiva, simmetrica e transitiva — di *uguaglianza*, in guisa che le coppie suddette diano luogo ad un sistema di grandezze soddisfacenti ai postulati 1).... 5).

Porremo a tale scopo:

$$(B, C) + (B, D) = (B, C + D),$$

quindi

$$(B, C) = (nB, \frac{C}{n}),$$

e più in generale

$$(B, C) = (n \frac{B}{m}, m \frac{C}{m}).$$

Ciò posto è facile verificare che gli astratti delle coppie (B, C), in ordine all'uguaglianza sopra definita, dan luogo ad un nuovo sistema di grandezze per cui sono soddisfatte le condizioni 1).... 5). Se per es. le grandezze date sono « segmenti », le nuove grandezze costruite sono « aree di rettangoli ».

Ora se

$$B = \frac{m}{n} A, \quad C = \frac{p}{q} A$$

si definirà il *prodotto* $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}$ *come il rapporto della grandezza* (BC) *ad* (AA).

Digitized by Google

Ma
$$(B,\ C) = \left(nB, \frac{C}{n}\right) = \left(mA, \frac{p}{nq}\ A\right) = \frac{1}{nq}(mA, pA) =$$
$$= \frac{1}{nq}(mpA,\ A) = \frac{mp}{nq}(AA),$$
quindi il prodotto
$$\frac{m}{n}\frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}.$$

È chiaro che questa definizione del prodotto è la diretta estensione di quella data pei numeri (interi) cardinali.

D'altra parte anche la formula
$$ab = \underset{b}{a + a + \ldots + a},$$
si può estendere osservando che il rapporto di (BC) a (BA) uguaglia il rapporto di C ad A, e il rapporto di (BA) ad (AA) uguaglia il rapporto di B ad A, quindi: *il prodotto* $\frac{m}{n}\frac{p}{q}$ *è la misura rispetto ad* A *di una grandezza* $D = \frac{p}{q}B$, *la cui misura rispetto a* $B = \frac{m}{n}A$ *è* $\frac{p}{q}$.

Quest'ultima definizione del prodotto lascia subito scorgere come si effettui la *divisione* = operazione inversa della moltiplicazione:
$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n}\frac{q}{p} = \frac{mq}{np}.$$

§ 29. **Numeri razionali ordinali.** — I numeri fratti, introdotti come rapporti di grandezze commensurabili, si lasciano *ordinare in una serie*, secondo l'ordine delle grandezze crescenti di cui esprimono il rapporto all'unità; si ha così
$$\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$$
se
$$mq > np$$
$$\left(\frac{m}{n} = \frac{p}{q} + \frac{r}{s},\quad \frac{r}{s} = \frac{mq - np}{nq}\right).$$

Da questo punto di vista i numeri fratti appariscono come *numeri d'ordine degli elementi di una serie* e sono quindi suscettibili di estensione quanto al *segno*.

Digitized by Google

Per introdurre i numeri fratti come numeri ordinali bisogna caratterizzare la serie da essi formata. Ed è subito da notare che *questa serie non è più bene ordinata*, chè dopo un elemento qualsiasi $\frac{m}{n}$ non vi è più un successivo immediato, come non vi è *un* precedente.

Nondimeno la serie dei numeri fratti si lascia formare mediante successive costruzioni di serie ben ordinate, secondo ci proponiamo di esporre.

Riferiamoci per semplicità ai numeri positivi e partiamo quindi dalla serie S_1 dei numeri naturali:

$$0, \quad 1, \quad 2..., \quad n....$$

Consideriamo le trasformazioni della serie S_1 che nascono *per moltiplicazione*:

$$y = nx.$$

Una trasformazione di questo tipo cambia S_1 nella serie S_n:

$$0, \quad n, \quad 2n...,$$

la quale è ben ordinata come S_1; la relazione fra S_1 e S_n si può esprimere dicendo che S_1 contiene S_n, e che fra due elementi consecutivi di S_n vi sono $n - 1$ elementi di S_1.

Ora supponiamo che sia data una *regola per cui si possano inserire* $n - 1$ *elementi intermedi fra due qualsiansi elementi consecutivi* m *ed* $m + 1$ *di* S_1; questa costruzione dà una serie $S_{\frac{1}{n}}$ la quale può dirsi ottenuta da S_1, mercè una *divisione* per n, poichè $S_{\frac{1}{n}}$ moltiplicata per n si trasforma in S_1.

Supponiamo che:

1) dato un qualsiasi numero $n = 2, 3...$, sia possibile la divisione per n della serie S_1;

2) la divisione di S_1 per nm equivalga alla divisione successiva di S_1 per n e di $S_{\frac{1}{n}}$ per m.

L'insieme di tutte le serie ottenute in tal modo colla divisione della serie principale S_1 *costituisce una serie* S *ordinata come quella dei numeri fratti*; l'elemento m^{mo} della serie $S_{\frac{1}{n}}$ corrisponde ad $\frac{m}{n}$, e si ritrova nella serie $S_{\frac{1}{nr}}$ colla designazione $\frac{mr}{nr}$.

Digitized by Google

La costruzione sopra indicata si può ripetere prendendo come serie principale S_1 la serie quasi bene ordinata dei numeri interi relativi; si ottiene così la serie fondamentale che corrisponde ordinatamente ai numeri fratti positivi e negativi cioè ai numeri *razionali*; questa serie si potrà designare brevemente col nome di *serie razionale*.

Come esempio concreto della costruzione precedente si può addurre la costruzione di una serie razionale di punti sopra la retta, effettuabile in diversi modi mediante semplici operazioni geometriche.

La più semplice costruzione si ottiene considerando nel piano la rete determinata da due sistemi di rette parallele, che sono rappresentati — in coordinate cartesiane — dalle equazioni:

$$x = m, \quad y = n \qquad \begin{pmatrix} m = 0, 1, 2.... \quad \text{o} \quad = -1, -2.... \\ n = 0, 1, 2.... \end{pmatrix}.$$

I vertici della rete corrispondono alle coppie di numeri interi n, m. Proiettiamo la serie dei vertici della rete appartenenti alla retta $y = n$ (> 0) dal punto $(0, -1)$ sopra la retta $y = 0$; si ottiene allora su questa retta la serie $\underset{\overline{n+1}}{S_1}$, che si estende a destra e a sinistra dello zero.

La serie razionale così costruita corrisponde a quella stessa che viene determinata comparando all'unità le grandezze dei segmenti ad essa commensurabili, aventi come origine 0.

Anche a prescindere da questa particolare determinazione metrica, si può costruire sulla retta una serie razionale mediante successive costruzioni di quarti armonici a partire da tre punti dati, ciò che dà luogo alle così dette *coordinate proiettive*.

Ritorniamo ora alla considerazione generale di una serie razionale S costruita a partire da una serie principale quasi ben ordinata S_1, e vediamo di estendere in rapporto ad S la definizione ordinale della somma e del prodotto di due numeri interi.

Osserviamo anzitutto che alla serie fondamentale S, appartengono infinite serie quasi ben ordinate, *generatrici* di S, le quali dànno per divisione successiva la stessa serie razionale, per modo che ciascuna di esse può essere assunta in luogo di S_1 come *serie principale*. Tali sono in primo luogo le serie S_n e $S_{\overline{n}}$ ottenute dalla moltiplicazione e divisione di S_1, in secondo luogo tutte le serie da cui si ottiene per divisione una di queste.

Digitized by Google

La determinazione più generale di una serie generatrice entro la serie razionale S, dipende dalla scelta arbitraria di due elementi O, U, susseguentisi in S_1, che si assumono come 0, 1. Se, rispetto ad una numerazione di S (e quindi alla scelta di una serie principale S_1), O, U hanno rispettivamente i numeri d'ordine $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ $\left(\frac{c}{d} > \frac{a}{b}\right)$, vi è *una* serie generatrice di S in cui U è *il successivo* di O: tale serie è contenuta in $S_{\frac{1}{bd}}$, e divisa per $bc - ad$ dà appunto questa $S_{\frac{1}{bd}}$.

L'osservazione precedente si può anche esprimere dicendo che *la numerazione degli elementi di una serie razionale* S *dipende dalla scelta arbitraria degli elementi* 0, 1.

Ciò posto si supponga data una prima numerazione della serie razionale S; l'addizione e la moltiplicazione dei numeri razionali si lascia definire, in rapporto alla serie stessa, come segue:

1) Si cambi l'origine 0 nell'elemento $\frac{a}{b}$ trasportando contemporaneamente l'elemento $1 = \frac{b}{b}$ in $\frac{a+b}{b}$; con ciò si dà origine ad una nuova numerazione di S e quindi ad una *trasformazione ordinata* di S in sè stessa, dove si prende come serie principale quella $S_{\frac{1}{b}}$ che contiene 0 e $\frac{a}{b}$. In questa trasformazione l'elemento $\frac{c}{d}$ viene trasportato in un nuovo elemento che si *definisce come somma*:

$$\frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

Considerando la serie $S_{\frac{1}{bd}}$ che contiene i tre elementi 0, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, si trova

$$\frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{bc}{bd} + \frac{ad}{bd} = \frac{bc + ad}{bd}.$$

2) Si lasci ferma l'origine 0 e si cambi l'elemento 1 in $\frac{a}{b}$; con ciò si dà luogo ad una trasformazione ordinata della serie S in sè stessa: l'elemento che in questa trasformazione corrisponde a $\frac{c}{d}$ si *definisce come prodotto* $\frac{c}{d}\,\frac{a}{b}$. Considerando la serie $S_{\frac{1}{bd}}$ a cui appartengono entrambi gli elementi $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ si trova

$$\frac{c}{d}\,\frac{a}{b} = \frac{ac}{bd}.$$

Digitized by Google

Così *la somma e il prodotto risultano definiti nella serie razionale dalla doppia arbitrarietà che appartiene alla numerazione ordinata della serie, in rapporto alla scelta degli elementi* 0 *e* 1.

Queste definizioni inerenti alle trasformazioni ordinate della serie in sè stessa, in rapporto al cambiamento dell'origine 0 e dell'elemento unità, hanno il vantaggio di condurre insieme all'addizione e alla sua operazione inversa « sottrazione », alla moltiplicazione e alla sua operazione inversa « divisione ».

Nota. — Il cambiamento più generale degli elementi 0, 1, conduce alla trasformazione di S rappresentata da

$$y = \frac{a}{b}x + \frac{c}{d}.$$

La serie S ammette altre trasformazioni *ordinate* in se stesse; per es. :

$$y = x \text{ per } x \leq 1, \quad y = 2x \text{ per } x > 1;$$

ma le precedenti trasformazioni si distinguono da queste per la proprietà di cambiare ogni serie generatrice di S in una serie generatrice: due serie generatrici di S dando luogo come abbiam detto, per divisione, ad una medesima serie, in cui è solo determinata diversamente l'origine.

§ 30. **Postulati che caratterizzano la serie razionale.** — Cerchiamo di approfondire l'analisi delle proprietà che definiscono una serie razionale S.

Il concetto della serie razionale è definito come concetto astratto in rapporto al gruppo delle trasformazioni $y = \alpha x + \beta$ dalle seguenti proprietà:

1) È dato un ordine s, degli elementi di S.

2) Dati due elementi A, B di S, susseguentisi in s, viene determinato *un* elemento C che succede a B in s, e che diremo *il successivo* (*di rango* 1) *dopo* A, B; quindi viene determinato *un* elemento C successivo dopo B, C o successivo *di rango* 2 dopo A, B; e così di seguito.

3) Esiste un elemento P (*il precedente* ad A, B) tale che B è il successivo dopo P, A.

4) Esiste *un* elemento X, compreso fra A, B in s, tale che B è il successivo di rango n (= 1, 2, 3....) dopo A, X: X si dirà *il medio di rango* n fra A, B;

Digitized by Google

5) Dati tre elementi A, B, C, susseguentisi in s, si può sempre determinare (in diversi modi) un elemento Y, compreso fra A e B, per modo che B e C appartengano alla serie dei successivi (di rango $n = 1, 2, \ldots$) dopo A, Y; oppure

5') a partire da due elementi qualsiansi della serie S, eseguendo ripetutamente la costruzione del successivo, del precedente e del medio di rango $n = 1, 2, \ldots$ in rapporto a tutte le possibili coppie di elementi dati e costruiti, si ottengono *tutti* gli elementi di S.

Questi postulati esprimono i fatti fondamentali inerenti alla generazione della serie razionale S, mercè la divisione successiva di una serie principale quasi bene ordinata.

Sono serie generatrici di S quelle costituite dai successivi e dai precedenti (di rango $n = 1, 2 \ldots$) di due elementi dati. Ognuna di queste serie può essere presa come serie principale corrispondente alla serie dei numeri interi relativi; la numerazione di essa viene fissata tosto che si scelgano due elementi successivi come 0, 1, e dopo ciò resta anche fissata la corrispondenza fra gli elementi di S e i numeri razionali.

Secondo la definizione che risulta dai postulati precedenti, il concetto di serie razionale implica, non soltanto un ordine di questa, ma anche un *criterio associativo* per cui *ad ogni coppia* di elementi viene associato *un successivo*; si tratta di una vera generalizzazione del concetto di serie ben ordinata o quasi ben ordinata.

Ora supponiamo che sia data una serie ordinata di elementi, S, e cerchiamo di determinare le condizioni perchè fra gli elementi di questa possa stabilirsi un criterio associativo, in guisa da dare origine ad una serie razionale; in altre parole cerchiamo le condizioni perchè possa porsi una corrispondenza ordinata fra S e la serie dei numeri razionali.

A tale domanda rispondono i seguenti teoremi: di CANTOR (1895).

La classe dei numeri razionali è numerabile.

Si considerino anzitutto le frazioni positive $\frac{a}{b}$ ridotte al minimo denominatore. Possiamo ordinarle in una serie, ponendo

$$\frac{a}{b} \text{ prima di } \frac{c}{d}$$

se

$$a + b < c + d,$$

Digitized by Google

e

$$\frac{a}{b} \text{ prima di } \frac{c}{d}$$

se

$$a + b = c + d$$
$$a < c.$$

In tal modo si ottiene una serie ben ordinata:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1} \ldots$$

che contiene tutte le frazioni positive ed i cui termini corrispondono a un numero d'ordine progressivo

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4 \ldots$$

Similmente si possono far corrispondere le frazioni negative ai numeri

$$-1, \quad -2, \quad -3 \ldots$$

Con ciò gli elementi della classe data (numeri razionali) vengono fatti corrispondere ai numeri relativi

$$\ldots -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \ldots;$$

ma la serie di questi si può numerare, designando

$$\begin{array}{rcl} 0 & \text{con} & 1, \\ n & \text{con} & 2n \\ -n & \text{con} & 2n + 1. \end{array} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Quindi gli elementi della classe data vengono fatti corrispondere ai numeri naturali 1, 2, 3.... c. d. d.

Affinchè una serie S *possa porsi in corrispondenza ordinata colla serie dei numeri razionali è necessario e sufficiente che:*

1) *l'insieme degli elementi di* S (a prescindere dall'ordine) *costituisca una classe numerabile;*

2) *l'ordine di* S *sia tale che non vi sia nè primo nè ultimo elemento e che fra due elementi qualsiansi vi siano sempre elementi intermedi.*

Digitized by Google

Nelle ipotesi enunciate gli elementi della classe S si trovano disposti in due ordini diversi: in un ordine s appartenente alla serie S, e in un ordine a che viene stabilito in virtù della corrispondenza fra gli elementi di S e i numeri naturali. Ciò posto si designino rispettivamente con 0, 1 gli elementi che in a portano i numeri d'ordine 1, 2; fra gli elementi che succedono a questi in s si considererà quello che ha il più piccolo numero d'ordine in a e si designerà con 2; quindi fra gli elementi che succedono a questo in s si considererà quello che ha il più piccolo numero d'ordine in a e si designerà con 3; e così di seguito. Poi, fra gli elementi che precedono in s il primo designato con 0, si considererà quello che ha il più piccolo numero d'ordine in a, designandolo con -1. Così seguitando si è costruita in S una serie principale

$$\ldots -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \ldots$$

Per determinare la numerazione degli elementi di S che, rispetto ad s sono compresi fra due successivi m, $m+1$, della anzidetta serie principale, si procederà come segue:

Si considererà l'elemento compreso fra m, $m+1$ nell'ordine che porta il più piccolo numero d'ordine in a e si designerà con $m+\frac{1}{2}$; si considererà l'elemento compreso fra m, $m+\frac{1}{2}$ che porta il più piccolo numero d'ordine in a, e si designerà con $m+\frac{1}{2\cdot 3}$; quindi l'elemento compreso fra $m+\frac{1}{2\cdot 3}$ ed $m+\frac{1}{2}$ che porta il più piccolo numero d'ordine in a, e si designerà con $m+\frac{2}{2\cdot 3}=m+\frac{1}{3}$; l'elemento fra $m+\frac{1}{2}$ e $m+1$ che porta il più piccolo numero d'ordine in a, e si designerà con $m+\frac{4}{2\cdot 3}$; l'elemento fra questo ed $m+1$ che porta il più piccolo numero d'ordine in a e si designerà con $m+\frac{5}{2\cdot 3}$. È ormai chiara la legge con cui si determineranno successivamente gli elementi che verranno designati con

$$m+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4},\ m+\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4},\ \ldots,\ m+\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4} \text{ e quindi } m+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \text{ ecc.}$$

Digitized by Google

Resta da provare che la serie razionale così generata in S esaurisce tutti gli elementi di S, cioè che ogni elemento di S trova posto nella numerazione definita innanzi. Anzitutto si consideri un qualsiasi elemento P di S e si faccia vedere che P, ove non appartenga alla serie principale, trovasi compreso fra due elementi m e $m + 1$ di questa. A tal fine, posto che P succeda a 0 (o come diremo brevemente che sia a destra di 0), basterà far vedere che esiste qualche elemento della serie principale suddetta, a destra di P. Ora, se P porta in α il numero d'ordine n, ogni elemento della serie principale che porti in α un numero d'ordine $> n$ trovasi a destra di P.

Posto dunque che P sia compreso fra i due elementi della serie principale di S, designati con m e $m + 1$, si tratta di far vedere che la serie dei medi inseriti fra questi contiene P. Ma ciò si dimostra per assurdo : infatti se la suddetta serie dei medi non contenesse P, si troverebbero infiniti elementi di essa, a destra e a sinistra di P, che dovrebbero portare in α un numero d'ordine $< n$. Con ciò il teorema è dimostrato.

III. — Teorie analitiche.

§ 31. **La teoria delle coppie: numeri relativi.** — Le teorie analitiche dei numeri relativi e dei numeri fratti, si presentano fra loro strettamente connesse. Si hanno in fatto tre teorie principali : *la teoria delle coppie, la teoria degli operatori* e *quella delle congruenze* (di Kronecker) che ha il vantaggio di estendersi anche al caso dei numeri irrazionali algebrici.

La prima teoria, che si può riattaccare — come si è detto — ad Hankel (1867), è stata sviluppata da O. Stolz (1885) e da J. Tannery (1886); ripresa poi con lievi varianti da diversi critici matematici (Russell, Padoa ecc.). Vediamo come essa conduca a introdurre i numeri relativi. Qui si tratta in sostanza di dedurre la costruzione della serie

$$\ldots. -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3 \ldots.$$

da un'unica serie data. All'uopo la teoria delle coppie, considera al posto dei numeri naturali a, b, le *coppie ordinate* (ab), ponendo per definizione :

$$(ab) = (cd)$$

se

$$a + d = b + c.$$

Digitized by Google

La relazione così definita è un'uguaglianza — soddisfacendo alle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva — sicchè è lecito formare una *classe di coppie uguali*:

$$(ab) = (cd) = (ef)...,$$

e costruire quindi il *concetto astratto della coppia rispetto alla classe suddetta*; questo concetto astratto fornisce il *numero relativo*

$$a - b = c - d = e - f .....$$

I numeri relativi così definiti si possono *ordinare in una serie ponendo*

$$a - b > a' - b'$$

se

$$a + b' > b + a',$$

e si ottiene allora la serie:

$$.... 0 - 3, \quad 0 - 2, \quad 0 - 1, \quad 0 - 0, \quad 1 - 0, \quad 2 - 0, \quad 3 - 0...,$$

equivalente a

$$..... - 3, \quad - 2, \quad - 1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3....$$

Le operazioni sui numeri relativi si definiscono mediante le formule:

$$(a - b) + (c - d) = a + c - (b + d)$$
$$(a - b) - (c - d) = a + d - (b + c)$$
$$(a - b)(c - d) = ac + bd - (ad + bc),$$

provando che: se

$$a - b = a' - b', \quad c - d = c' - d'$$

anche

$$(a - b) \pm (c - d) = (a' - b') \pm (c' - d')$$

e

$$(a - b)(c - d) = (a' - b')(c' - d');$$

per il che basta verificare che: se

$$a + b' = a' + b$$

e

$$c + d' = c' + d,$$

Digitized by Google

si deduce

$$a + c + b' + d' = a' + c' + b + d,$$
$$a + d + b' + c' = a' + d' + b + c,$$
$$ac + bd + a'd' + b'c' = a'c' + b'd' + ad + bc.$$

L'ultima formula si dimostra passando attraverso alla

$$(a - b)(c - d) = (a' - b')(c - d),$$

che importa

$$(ac - bc) + (bd - ad) = (a'c - b'c) + (b'd - a'd),$$

ossia

$$\left.\begin{array}{ll} ac + b'c = bc + a'c & (= (a + b')c = (a' + b)c) \\ bd + a'd = b'd + ad & (= (b + a')d = (b' + a)d) \end{array}\right\}.$$

Si verifica quindi che le operazioni sopra definite soddisfano alle proprietà formali delle operazioni sui numeri naturali: proprietà associativa e commutativa della somma e del prodotto, proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, condizione d'annullamento del prodotto.

§ 32. **I numeri fratti definiti per mezzo di « coppie ».** — La teoria dei numeri fratti che ricorre alle « coppie » procede come quella dei numeri relativi, nella maniera seguente.

Consideriamo le coppie ordinate di numeri interi (positivi c negativi)

$$(ab), \quad (cd)...,$$

e poniamo la *relazione d'uguaglianza*

$$(ab) = (cd)$$

se

$$ad = bc:$$

che è invero una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva.

Definiamo il *numero fratto* $\frac{a}{b}$ come *concetto astratto* della coppia (ab) in ordine all'uguaglianza definita innanzi. Sarà in ispecie

$$\frac{a}{b} = \frac{ar}{br}.$$

Digitized by Google

Quindi definiamo la *somma* e il *prodotto* di due numeri fratti colle formule

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Affinchè queste definizioni siano legittime, occorre provare che: se

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'} \qquad (a'b=ab')$$

$$\frac{c}{d}=\frac{c'}{d'} \qquad (c'd=cd'),$$

anche
$$\frac{ad+bc}{bc}=\frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$$

e
$$\frac{ac}{bd}=\frac{a'c'}{b'd'},$$

cioè
$$b'd'\,(ad+bc)=bd\,(a'd'+b'c')$$

e
$$acb'd'=a'c'db.$$

La seconda uguaglianza è evidente.

Per dimostrare la prima, si procederà per gradi, mostrando che

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}+\frac{c}{d},$$

cioè che
$$\frac{ad+bc}{bd}=\frac{a'd+b'c}{b'd},$$

il che importa

$$b'd(ad+bc)=bd(a'd+b'c)$$
$$ab'd^2+cdbb'=a'bd^2+cdbb'$$
$$ab'd^2=a'bd^2,$$
$$ab'=a'b.$$

Ora si verificheranno le proprietà formali delle operazioni definite innanzi: le proprietà commutativa e associativa della somma

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{cb+da}{db}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{bd}+\frac{e}{f}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right):$$

Digitized by Google

e le proprietà commutativa, associativa e distributiva del prodotto

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}=\frac{ca}{db}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b},$$

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}=\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right),$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\frac{e}{f}=\left(\frac{ad+bc}{bd}\right)\frac{e}{f}=\frac{ade+bce}{bdf}=$$

$$=\frac{ade}{bdf}+\frac{bce}{bdf}=\frac{ae}{bf}+\frac{ce}{df}=\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}+\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}.$$

La condizione d'annullamento del prodotto è evidente.

Infine si noterà che nel campo dei nostri numeri fratti, la *divisione* — operazione inversa della moltiplicazione — è sempre possibile:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc},$$

perchè

$$\frac{c}{d}\cdot\frac{ad}{bc}=\frac{adc}{bdc}=\frac{a}{b}.$$

Aggiungiamo che il sistema dei numeri fratti che abbiamo definito contiene i numeri $\frac{a}{1}$, la cui serie corrisponde ordinatamente a quella dei numeri a (interi, positivi e negativi), in guisa che ad $\frac{a}{1}+\frac{b}{1}$ e $\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{1}$ corrisponde rispettivamente $a+b$ e ab. Perciò $\frac{a}{1}$ si può identificare ad a (conforme al senso di $a:1$), e resta provato — senza far appello a giudizi sintetici (postulati) — che il sistema dei numeri interi si può estendere, conservando le proprietà fondamentali delle operazioni aritmetiche, per modo che la divisione riesca sempre possibile.

Nota. — In sostanza i numeri fratti sono introdotti, nella precedente teoria, col metodo euclideo, cioè con una definizione per astrazione del «rapporto (geometrico)», così come i numeri relativi vengono introdotti definendo la proporzionalità aritmetica o uguaglianza dei «rapporti aritmetici». Ora, al metodo delle coppie è stata mossa una critica concernente appunto il *significato logico delle definizioni per astrazione*, e toccante la forma che alcuni autori hanno dato alla teoria dei numeri fratti o relativi:

Digitized by Google

poichè qualcuno ha detto che i numeri anzidetti *sono* coppie $(a\,b)$ (per cui si definisce l'eguaglianza ecc.), anzichè astratti di esse in rapporto ad una classe di coppie, che è appunto definita dalla relazione d'uguaglianza.

Questa critica ha preso tanto più consistenza nella mente dei logici matematici della scuola di PEANO, per i motivi che abbiamo illustrato nella nota critica del § 9.

Quindi per RUSSELL e per PADOA, i numeri relativi o fratti diventerebbero addirittura « classi di coppie », e per BURALI-FORTI sarebbero « funzioni della coppia » che non si riesce a definire univocamente, perchè — egli dice — la scrittura

$$(ab) = (cd)$$

per

$$ad = bc,$$

definisce egualmente $\frac{a}{b}$ ed $f\left(\frac{a}{b}\right)$, con f funzione arbitraria.

A tutte queste difficoltà risponde la nota critica del § 9 sopra citata. Aggiungiamo soltanto che, per quanto concerne i numeri fratti, EUGENIO MACCAFERRI — per evitare l'astrazione — suggerisce di definirli riferendosi alle frazioni ridotte ai minimi termini, come « coppie di numeri primi fra loro ». La quale proposta risponde invero ad una determinazione particolare del concetto astratto (una qualunque delle coppie di numeri aventi ugual rapporto), che è perfettamente legittima.

§ 33. **Teoria dei numeri operatori.** — In luogo che come « coppie » o meglio come « rapporti (aritmetici o geometrici) di coppie » i numeri relativi e fratti si possono introdurre analiticamente come « operatori su numeri convenienti ». L'idea di costruire una siffatta teoria appartiene, come si è accennato, al MÉRAY che, nel 1889, ha riguardato appunto le frazioni quali « fattori fittizi », e l'anno appresso estendeva il medesimo concetto ai numeri negativi; PEANO, ed alcuni suoi discepoli, hanno accolto e sviluppato l'idea, introducendo il nome di « operatori ».

I numeri relativi s'introdurranno come « numeri da sommare o togliere da numeri naturali sufficientemente grandi »; a tal uopo, dopo aver osservato che per x assai grande esiste sempre

$$x + a - b,$$

Digitized by Google

si porrà per definizione

$$x + (a - b) = x + a - b,$$

e quindi

$$(a - b = (c - d)$$

se

$$x + (a - b) = x + (c - d).$$

Qui occorre avvertire che l'uguaglianza

$$x + (a - b) = x + (c - d)$$

porta

$$y + (a - b) = y + (c - d),$$

per qualunque y che renda possibili le operazioni indicate. E la condizione d'uguaglianza si traduce in quella dei rapporti aritmetici:

$$a + d = b + c.$$

Ma questa teoria presenta un vantaggio sulla teoria delle coppie, nella definizione della *somma*, che qui non appare puramente artificiosa.

Infatti la somma si definisce mediante la condizione:

$$x + \{(a - b) + (c - d)\} = \{x + (a - b)\} + (c - d),$$

donde resulta

$$(a - b) + (c - d) = a + c - (b + d).$$

Per definire il prodotto occorre postulare la proprietà distributiva di esso rispetto alla somma, che dà

$$(a - b)(c - d) = ac + bd - (ad + bc),$$

ed è necessario dimostrare — come nella teoria delle coppie — che « prodotti di numeri relativi uguali sono uguali ».

Un procedimento analogo vale a introdurre le frazioni $\frac{a}{b}$, come

Digitized by Google

operatori sopra ogni numero intero x, tale che xa sia divisibile per b.

Si noterà che se

$$x\frac{a}{b}=x\frac{c}{d},$$

anche

$$y\frac{a}{b}=y\frac{c}{d},$$

purchè le operazioni indicate siano possibili; in tal caso dovremo ritenere:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Ciò importa

$$xad=xbc$$

e quindi

$$ad=bc.$$

Ora s'introducono la *somma* e il *prodotto* dei numeri fratti mercè le definizioni:

$$x\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=x\frac{a}{b}+x\frac{c}{d}$$

$$x\left(\frac{a}{b}\frac{c}{d}\right)=\left(x\frac{a}{b}\right)\frac{c}{d},$$

supposto sempre che le operazioni indicate siano possibili.

Dalla prima formula si ricava:

$$x\frac{a}{b}+x\frac{c}{d}=x\frac{ad}{bd}+x\frac{bc}{bd}=x\frac{ad+bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

E dalla seconda:

$$\left(x\frac{a}{b}\right)\frac{c}{d}=x\frac{ac}{bd},$$

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Digitized by Google

La teoria si riduce dunque a quella delle coppie, su cui ha il vantaggio di giustificare le definizioni di somma e di prodotto. Di più resta qui inutile dimostrare che per

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'} \quad \frac{c}{d}=\frac{c'}{d'},$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'},$$

giacchè le uguaglianze

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'} \quad \frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}$$

(che si traducono in

$$ab' = a'b, \; cd' = c'd),$$

denotano l'identità delle operazioni

$$x\frac{a}{b} \text{ e } x\frac{a'}{b'}, \qquad x\frac{c}{d} \text{ e } x\frac{c'}{d'}.$$

NOTA. — L'introduzione dei numeri relativi o fratti come operatori si può fare anche in modo sintetico anzichè analitico, cioè interpretando i numeri come « operatori su grandezze » (BURALI-FORTI). In tal guisa si ritrova uno dei modi con cui i numeri negativi sono apparsi nella storia (cfr. § 23), e per le frazioni si ritorna senz'altro al concetto della misura o del rapporto.

§ 34. Il significato dei numeri estesi secondo Kronecker. — Ricorderemo infine, per la sua importanza storica e per la sua capacità di estendersi anche agl' irrazionali algebrici, l' interpretazione analitica dei numeri relativi e fratti, che abbiam detto essere stata data da LEOPOLDO KRONECKER (1887): il quale, del resto, — valendosi dell' introduzione delle indeterminate, dovuta a GAUSS — non ha fatto che riprendere un' idea affacciata da CAUCHY (1) per l' immaginario.

Osserviamo che l'uguaglianza di due numeri relativi

$$a - b = a' - b',$$

(1) « Exercices d'Analyse et de Physique mathématique », t. IV, 1847.

Digitized by Google

che porta $$a + b' = a' + b,$$

si riduce ad una congruenza rispetto al modulo $x + 1$:

$$a + bx \equiv a' + b'x \pmod{x + 1}.$$

Quindi il numero relativo $a - b$, si può sempre surrogare con « l'espressione $a + bx$, considerata rispetto al modulo $x + 1$ ». Le operazioni sopra i numeri relativi non esigono allora una speciale definizione; in primo luogo:

$$(a + bx) + (c + dx) = a + c + (b + d)x$$

e però *a fortiori*

$$(a + bx) + (c + dx) \equiv a + c + (b + d)x \pmod{x + 1};$$

in secondo luogo:

$$(a + bx)(c + dx) = ac + (ad + bc)x + bdx^2,$$

e poichè

$$bd\,x^2 \equiv bd \pmod{x + 1},$$

$$(a + bx)(c + dx) \equiv (ac + bd) + (ad + bc)x \pmod{x + 1}.$$

In modo analogo s' interpretano le relazioni d'eguaglianza tra frazioni, sostituendo l' unità frazionaria $\frac{1}{b}$ con un' indeterminata, e ponendo al posto della frazione $\frac{a}{b}$ l'espressione ax, considerata rispetto al modulo $bx - 1$: occorre tuttavia introdurre tante indeterminate e tanti moduli, quante sono le unità frazionarie che entrano in considerazione.

Infatti l'eguaglianza di due frazioni

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

si tradurrà ora nella congruenza

$$ax \equiv cy \pmod{bx - 1,\ dy - 1},$$

che le è equivalente in forza dell'identità

$$ax - cy = cy(bx - 1) - ax(dy - 1),$$

da cui si ottiene annullando i moduli.

Digitized by Google

Anche le formule della somma e del prodotto di due frazioni, si traducono nelle congruenze:

$$\left.\begin{array}{l} ax + cy \equiv (ad + bc)\, z \\ ax \cdot cy \equiv acz \end{array}\right\} \text{mod. } (bx - 1, dy - 1, bdz - 1)$$

che ad esse equivalgono in forza delle identità

$$\begin{aligned} ax + cy &= (ad + bc)\, z + adz\, (bx - 1) + \\ &+ bcz\, (dy - 1) - (ax + cy)\, (bdz - 1). \\ ax \,.\, cy &= acz + acd\, y\, z\, (bx - 1) + acz\, (dy - 1) - ac\, xy\, (bdz - 1). \end{aligned}$$

NOTA. — Il metodo di KRONECKER permette più generalmente di conferire significato alle formule contenenti irrazionali algebrici; in particolare le formule d'uguaglianza fra numeri complessi $a + bi$ ($i = \sqrt{-1}$) si traducono in congruenze rispetto al modulo $x^2 + 1$ (CAUCHY).

Parte terza. — ***I numeri irrazionali.***

I. — NUMERI E GRANDEZZE.

§ 35. **Introduzione storico-critica.** — I numeri irrazionali s'introducono nell'Aritmetica:

1) da un punto di vista sintetico, per misurare grandezze (come quelle dei segmenti) che possono essere incommensurabili rispetto all'unità scelta nel sistema, o per rappresentare con un numero d'ordine i punti di una serie continua — come la retta — che non è esaurita dalla costruzione di un sistema di punti corrispondenti ai numeri fratti;

2) da un punto di vista analitico, per dare un significato ad alcune operazioni fuori delle condizioni in cui esse riescono possibili. Le operazioni a cui qui si allude sono di due specie:

a) l'estrazione di radice, il logaritmo ecc. che conducono a *classi ben definite di numeri irrazionali* e non mai alla totalità di essi: per es. la possibilità illimitata dell'operazione $\sqrt{\ }$, portante su numeri positivi, richiede solo l'introduzione di numeri corrispondenti ai punti che si costruiscono sulla retta *colla riga e col compasso* a partire da 0, 1 (cfr. la Parte II e precisamente il vol. III di questa raccolta);

Digitized by Google

b) i *processi infiniti*: *serie*, *frazioni continue* ecc. nelle condizioni di *convergenza* che assicurano la *possibilità logica* dei simboli corrispondenti.

Ora si deve notare che le operazioni *a*) si riducono anch'esse — mercè il calcolo approssimato — a processi infiniti. Perciò la teoria analitica degli irrazionali, quale si sviluppa di solito corrispondentemente alle operazioni *b*), dà luogo alla *classe di numeri più estesa*. Ma ciò non toglie interesse all'indirizzo di ricerca in cui si studino successivamente i *più piccoli campi di numeri* (razionali e irrazionali) dove sono possibili certe operazioni.

A tale indirizzo appartengono alcune ricerche algebriche o aritmetiche menzionate negli Articoli della Parte II di questa raccolta.

Nel seguito di questo Articolo ci occuperemo della *teoria generale dei numeri irrazionali* che ha per iscopo di definirne la totalità.

Per la storia, diremo che la teoria (cardinale) dei numeri irrazionali, come rapporti di grandezze incommensurabili, trovasi sviluppata implicitamente sotto forma geometrica nel Libro V di EUCLIDE da cui, secondo DUHAMEL e STOLZ, si può trarre una vera teoria di codesti numeri.

Si fa risalire a PITAGORA (500 a. C.) la scoperta che la diagonale e il lato del quadrato sono incommensurabili; ma soltanto dopo la critica degli ELEATI e segnatamente di ZENONE, codesta scoperta fu posta nella sua vera luce. Da quel momento comincia l'elaborazione di una teoria generale delle grandezze che viene costruita da EUDOSSO di Cnido, teoria esposta appunto nel Libro V di EUCLIDE, la quale nel pensiero dei Greci costituiva una vera estensione dell'Aritmetica dei numeri interi e fratti. Anzi, secondo lo ZEUTHEN (1), la costruzione eudossiana in cui il rapporto è definito per astrazione mediante la proporzionalità, terrebbe dietro ad uno sviluppo precedente in cui esso resulterebbe per approssimazione dal metodo delle divisioni successive (spiegato in EUCLIDE, X) e però in sostanza con algoritmo non dissimile dalla « frazione continua », scoperta nella sua forma attuale da PIETRO CATALDI (1597).

Comunque, l'affermazione esplicita di EUCLIDE che le grandezze incommensurabili non si lasciano confrontare come i numeri,

(1) Cfr. T. BONNESEN, *Sur la théorie des nombres irrationnels de l'antiquité*. « Periodico di Matematiche », 1921.

Digitized by Google

non ci autorizza affatto a ritenere il punto di vista di EUCLIDE come più arretrato del punto di vista moderno, tranne perciò che concerne due ordini di progresso:

1) la designazione dei rapporti coi simboli dell'algebra;

2) il riconoscimento del postulato della continuità della retta e quindi la considerazione, almeno virtuale, del più ampio sistema costituito da tutti i possibili numeri irrazionali.

Gli Aritmetici e gli Algebristi del Medio Evo e del Rinascimento considerarono i rapporti di grandezze incommensurabili come *numeri ficti* o *numeri surdi*: così per es. LEONARDO FIBONACCI (*Liber abaci*, 1202). MICHELE STIEFEL nella sua *Arithmetica integra* (Norimberga, 1544), in rapporto al Libro X di EUCLIDE, parla espressamente di *numeri irrationales*, esprimendo anche la veduta che questi numeri occupano un posto determinato nella serie ordinata dei numeri, proprio come i numeri razionali. Quindi la prima considerazione esplicita degli irrazionali come numeri, fa appello al concetto ordinale.

La designazione del rapporto fra due segmenti con una *semplice lettera*, su cui si calcola *come sui numeri*, compare con DESCARTES; e nella *Arithmetica universalis* di NEWTON (1707) si trova la proposizione che ogni rapporto corrisponde ad un numero, posta come *definizione del numero*. « Per numerum non tam multitudinem unitatum, quam abstractam quantitatis cuiusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem, quae pro unitate habetur, rationem intelligimus. Estque triplex: Integer, Fractus et Surdus. Integer quem unitas metitur, fractus quem unitatis pars submultiplex metitur, et surdus cui unitas est incommensurabilis ».

Gli sviluppi critici moderni cominciano colla teoria analitica di WEIERSTRASS — resa nota nei citati *Elementi* di E. KOSSAK (1872) e poi da O. BIERMANN (1) — e con quella di CH. MERAY (2) (1869-1872) e di G. CANTOR (3) (1872): il primo implicitamente, e gli altri esplicitamente, definiscono i numeri irrazionali come limiti di

(1) *Theorie der analytischen Functionen*, Lipsia, 1887. Cfr. S. PINCHERLE, *Saggio di una introduzione alle funzioni analitiche secondo il prof. C. Weierstrass*. « Giornale di Matematiche », 1880.

(2) « Revue des Sociétés savantes » (1869); « Nouveau Précis » (1872); cfr. il ch. II. delle « Leçons nouvelles sur l'analyse infinitesimale », Parigi, 1894.

(3) Contenuta in una memoria sulle serie trigonometriche in « Math. Annalen », 5, che precede l'attività dell'A. nel campo della teoria degli insiemi.

Digitized by Google

successioni. D'altra parte nello stesso anno 1872 appariva il lavoro di R. DEDEKIND che introduce codesti numeri mediante « sezioni, o partizioni in classi, del campo dei numeri razionali ». CANTOR e DEDEKIND (1) — quest'ultimo illustrandone il contenuto geometrico nella forma più chiara — hanno anche riconosciuto il postulato di continuità della retta, per cui ad ogni numero irrazionale corrisponde un punto, e in forza del quale ai numeri irrazionali — da essi introdotti analiticamente per mezzo di convenzioni — viene conferito un significato sintetico.

Qui si deve rilevare il significato diverso che lo sviluppo della critica ha scoperto nelle due assunzioni, dei detti Autori, che essi stessi tenevano per equivalenti.

Il postulato della continuità, nella forma geometrica di DEDEKIND, porta che i segmenti rettilinei, o più in generale le grandezze d'un sistema per cui si ammetta valido, soddisfino al cosiddetto postulato d'ARCHIMEDE: « date due grandezze o in particolare due segmenti, esiste sempre un multiplo dell'una che supera l'altra ». Questa dipendenza (che il lettore ha appreso nell'Articolo Quinto) è stata dimostrata da O. STOLZ (2), che ha anche dato il nome di Archimede alla precedente assunzione: mentre ZEUTHEN ha riconosciuto poi che essa deve farsi risalire a EUDOSSO di Cnido.

STOLZ scorgeva nel postulato di DEDEKIND soltanto una più precisa determinazione dell'« assioma di continuità » enunciato da CANTOR, dicendo che « ad ogni numero irrazionale — introdotto come limite d'una successione convergente — corrisponde un punto (o segmento) della retta », e (come CANTOR stesso) riteneva assurda la considerazione di grandezze non-archimedee, che porta (in senso relativo) all'« infinito » e all'« infinitesimo attuale ». Ma quando la critica di G. VERONESE (3) (cfr. Articolo Quinto) — anche attraverso polemiche con CANTOR, STOLZ ecc. — ebbe mostrata la possibilità di codesta considerazione, si è riconosciuto che l'enunciato di CANTOR è suscettibile di essere tradotto con un'affermazione geometrica

(1) *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig, 1872. È notevole che questo studio precede di quindici anni quello sui numeri interi.

(2) *Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes*, « in Math. Annalen », 22 (1883). Cfr. *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik*, vol. I (1885).

(3) *Il continuo rettilineo e l'assioma V d'Archimede*, nelle « Memorie dell'Acc. dei Lincei », 1890; *Fondamenti di Geometria*, Padova, 1891.

Digitized by Google

meno significativa del postulato di DEDEKIND, in quanto si assuma come *condizione per l'esistenza d'un punto limite d'una successione*

$$a_1 \; a_2 \ldots . \; a_n \ldots . \; a_{n+r} \ldots .$$

l'ipotesi che « dato un segmento ε piccolo ad arbitrio esista sempre un intero m tale che, per $n > m$, la distanza $a_n \; a_{n+r}$ — per qualunque valore di r — risulti minore di ε ».

Del resto quest'affermazione — che si accorda sostanzialmente col principio IV della memoria di VERONESE del 1890 (1) — può esprimersi in diverse forme e in ispecie suole ridursi al caso in cui la successione data (che può supporsi in generale oscillante) si rimpiazzi con due successioni

$$a_1 \; a_2 \ldots . \; a_m \ldots .$$
$$a'_1 \; a'_2 \ldots . \; a'_n \ldots .$$

l'una di punti seguentisi verso destra, l'altra di punti procedenti verso sinistra, che convergano ad un limite comune (la distanza $a_n \; a'_n$ diventando più piccola d'un ε comunque prefissato).

Il postulato geometrico così ridotto, che risponde ad uno dei modi d'esposizione più frequenti della teoria degl'irrazionali di CANTOR (cfr. § 43) viene comunemente designato — specialmente dagli Autori italiani — col nome di *postulato di* CANTOR, e a quest'uso anche noi ci atterremo: sebbene a dir vero sarebbe più giusto designarlo come *postulato di* CANTOR-VERONESE, e ad ogni modo non si possa vedere nemmeno in questa designazione un significato storico preciso.

Termineremo queste note d'introduzione storico-critica, insistendo sul punto già accennato che costituisce la differenza più essenziale fra la teoria euclidea e le vedute moderne. EUCLIDE costruisce la dottrina generale delle grandezze raccogliendo i principî comuni che valgono nel confronto di diverse specie di grandezze geometriche: segmenti, aree, volumi, angoli e archi di cerchio. In questa dottrina, puramente *ipotetica*, non compare alcun *postulato esistenziale* relativo alla divisibilità delle grandezze o alla determinazione di una quarta proporzionale dopo tre grandezze date ecc.;

(1) Cfr. *Fondamenti*, Ip. VIII, p. 150.

Digitized by Google

ma sempre l'esistenza di grandezze soddisfacenti a date condizioni viene dimostrata, per ciascuna specie di grandezze, mediante *costruzioni geometriche*.

Si ammettano, accanto alla riga e al compasso usati da EUCLIDE, anche altri istrumenti costruttivi di ordine superiore, si riconosce allora in ciascuna delle classi considerate da EUCLIDE, l'esistenza di grandezze soddisfacenti a condizioni cui i mezzi euclidei non valgono a soddisfare.

Il punto di vista moderno oltrepassando i limiti segnati da ogni ordine particolare di costruzioni, pone alla base della teoria delle grandezze il postulato esistenziale di continuità che DEDEKIND ha aggiunto consapevolmente alla teoria antica, e da cui si deducono in ispecie la divisibilità delle grandezze e l'esistenza della quarta proporzionale (cfr. Articoli Quarto e Quinto); come vedremo, ciò corrisponde a considerare la classe di grandezze più estesa in cui può essere contenuto un sistema soddisfacente ai postulati euclidei.

Con questa modificazione indicheremo lo sviluppo della teoria dei rapporti di EUCLIDE, interpretata come teoria generale dei numeri reali positivi.

§ 36. **I numeri come rapporti di grandezze.** — Le *grandezze* di un sistema Γ sono definite per astrazione da una classe di enti in cui è posta una relazione di eguaglianza (riflessiva, simmetrica e transitiva).

Il concetto generale delle grandezze come enti d'un sistema per cui è definita l'uguaglianza, e poi anche la disuguaglianza e la somma, ha origine da H. GRASSMANN ed è stato svolto da O. STOLZ (l. c., 1883).

I postulati che caratterizzano in questo senso un sistema di grandezze, secondo la comune intuizione, verranno da noi riassunti come segue:

1) date due grandezze A, B, viene determinata in Γ una terza grandezza $A + B$, *somma* di quelle;

2) date due grandezze A, B, disuguali, una ed una sola di queste è *maggiore* dell'altra, cioè si può considerare come somma dell'altra e di una terza grandezza C (*differenza* tra le due $= A - B$):

$$A = B + C\,(A > B), \quad \text{oppure} \quad B = A + C\,(B > A);$$

Digitized by Google

da questo postulato di *sottrazione* o *di disuguaglianza* segue che le grandezze formano una serie ordinata, essendo

$$A > C \quad \text{se} \quad A > B, \quad B > C;$$

3) la somma gode delle proprietà commutativa e associativa;

4) data una grandezza A, esiste sempre in Γ una qualche grandezza B (minore di A) di cui A è maggiore; segue che date due grandezze disuguali vi sono sempre grandezze maggiori della minore e minori della maggiore;

5) il cosiddetto *postulato d'*ARCHIMEDE: date due grandezze, A, B esiste sempre un multiplo

$$nA > B \qquad (nA = \underbrace{A + A + \ldots + A}_{n});$$

6) il cosiddetto *postulato di* CANTOR (1): siano date due successioni (*convergenti*) di grandezze:

$$A_1\, A_2 \ldots A_n \ldots$$
$$B_1\, B_2 \ldots B_n \ldots,$$

le prime crescenti, le seconde decrescenti, tutte maggiori delle prime, e tali che, presa una qualsiasi grandezza ε (piccola ad arbitrio) si possa sempre determinare un numero n per cui

$$B_n - A_n < \varepsilon;$$

allora esiste sempre una grandezza L (*limite comune* delle due successioni) maggiore delle grandezze A_i, e minore delle grandezze B_i.

Si noti che l'ipotesi implicata dall'affermazione di due successioni convergenti, porta l'unicità del loro limite comune.

Sulla base di questi postulati si può definire il «*rapporto di due grandezze*» come concetto astratto in ordine ad una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva, che si pone quale «uguaglianza di rapporti» (*proporzione*).

L'uguaglianza di rapporti o proporzione

$$A : B = C : D,$$

(1) Cfr. la notizia storica data nel § 43.

Digitized by Google

esprime che, per qualsiasi coppia di numeri interi e positivi m, n, secondochè

$$mA \gtreqless nB$$

anche

$$mC \gtreqless nD.$$

La definizione della proporzione mostra subito che si tratta di una relazione riflessiva e simmetrica:

$$A : B = A : B;$$

e se

$$A : B = C : D$$

anche

$$C : D = A : B;$$

anzi dalla stessa definizione risulta pure senz'altro la possibilità di un altro scambio di termini, per cui da

$$A : B = C : D$$

si deduce

$$B : A = D : C.$$

Infine dal confronto di due proporzioni

$$A : B = C : D$$
$$C : D = E : F,$$

si deduce

$$A : B = E : F$$

(*Elementi* d' EUCLIDE, Libro V, prop. 11); si ha così la proprietà transitiva che, insieme all'altre due, permette di considerare la proporzione come un'uguaglianza e di costruire rispetto a questa il concetto astratto di rapporto.

Ora il post. 5) permette di dimostrare che:

Date tre grandezze A, B, C esiste sempre una grandezza D tale che

$$A : B = C : D.$$

Digitized by Google

L'unicità di questa 4ª proporzionale risulta dal postulato d'ARCHIMEDE.

Prendendo $A = nB$, il teorema precedente enuncia l'esistenza di $\frac{C}{n}$. Perciò il nostro sistema di grandezze contiene in sè un sistema di grandezze commensurabili.

Si passa quindi a definire la « somma e il prodotto di rapporti ».

Definiamo la somma di due rapporti, ponendo:

$$(B + C) : A = (B : A) + (C : A);$$

l'addizione di due rapporti che non hanno un termine comune si ridurrà a questo caso, trasformando uno dei due rapporti in un rapporto uguale. Ma *occorre dimostrare* che se

$$B : A = B' : A'$$

e

$$C : A = C' : A'$$
$$(B' + C') : A' = (B + C) : A.$$

È la prop. 24 d' EUCLIDE (Libro V).

La somma di rapporti gode evidentemente della proprietà commutativa ed associativa.

Il *prodotto di due rapporti* si definisce ponendo:

$$(A : B) . (B : C) = A : C$$

e mostrando, con EUCLIDE, che se

$$A : B = A' : B', \quad B : C = B' : C'$$

anche

$$A : C = A' : C',$$

cioè « ragioni composte di ragioni uguali sono uguali »; in virtù del qual principio si possono moltiplicare anche due rapporti non aventi un termine comune, trasformando uno di essi in un altro uguale. E la moltiplicazione gode quindi delle proprietà commutativa, associativa e distributiva.

Notisi che il prodotto di due rapporti si può anche definire

Digitized by Google

formando un nuovo *sistema di grandezze* colle coppie (non ordinate) (AB) costruite colle grandezze del sistema dato, ove si ponga

$$(AB + AC) = (AB) + (AC),$$

ed

$$(AB) = (CD)$$

quando

$$A : C = D : B,$$

(aree dei rettangoli). Allora il prodotto

$$(A : B) \,.\, (C : D) = (AC) : (BD).$$

Come si è osservato le operazioni sopra definite fra « rapporti » danno luogo alle relazioni fondamentali dell'Aritmetica. Le operazioni inverse sono soggette alle stesse limitazioni che pei numeri razionali positivi; la divisione è sempre possibile, perchè:

$$(A : B) : (C : B) = (A : B) \,.\, (B : C) = A : C\,;$$

invece la sottrazione è possibile fra due rapporti disuguali, in un solo senso.

Se

$$(B : A) \neq (C : A),$$

si può trovare una coppia d'interi m, n tale che sia

$$nB > mA, \quad nC \leq mA$$

oppure viceversa

$$nB \leq mA, \quad nC > mA\,;$$

nel primo caso

$$B : A > C : A$$

nel secondo

$$B : A < C : A\,;$$

e se

$$B : A > C : A$$

anche

$$B > C,$$

(EUCLIDE, Libro V, prop. X),

Digitized by Google

quindi

$$B = C + E$$
$$(B : A) = (C : A) + (E : A).$$

In definitiva *i rapporti fra le coppie di grandezze del nostro sistema fondamentale si possono considerare come formanti un sistema Σ di numeri assoluti che soddisfa alle proprietà fondamentali delle operazioni aritmetiche e comprende in sè il sistema* S *dei numeri razionali assoluti* cioè i rapporti delle coppie di grandezze commensurabili.

In ogni caso il numero-rapporto di due grandezze si potrà designare con un simbolo

$$\mu = A : B.$$

Si scrive à

$$\mu = \frac{m}{n}$$

se, essendo m e n interi,

$$A = \frac{m}{n} B ;$$

invece quando A e B sono incommensurabili (cioè non esistono due interi m, n per cui $A = {}_n B$) si dirà che μ è un *numero irrazionale.*

§ 37. **Continuità e integrità.** — I postulati che abbiamo dato come definizione implicita di un sistema di grandezze, aggiungono alle ipotesi euclidee l'ipotesi della continuità, formulata col postulato che abbiamo denominato da Cantor.

Il significato di questa ipotesi si lascia comprendere mercè le riflessioni seguenti. Si considerino due sistemi di grandezze Γ, Γ' soddisfacenti ai postulati 1).... 5) del numero precedente: si supponga inoltre che Γ soddisfi al post. 6) (di Cantor) e che in Γ' sia possibile la divisibilità delle grandezze {maggiore determinazione del post. 4), che resulta per Γ come conseguenza di 6)}. In tali ipotesi Γ e Γ' contengono ciascuno un sistema di grandezze commensurabili, che designeremo rispettivamente con G e G'; e fra G, G' si può porre una corrispondenza biunivoca.

Ora considerando l'ordine delle grandezze crescenti, il sistema Γ viene ordinato come una serie di elementi; altrettanto

Digitized by Google

si dica di Γ'. Dato un elemento qualsiasi A' di Γ', che non appartenga a G', si possono costruire due successioni convergenti di grandezze appartenenti a G' ed aventi come limite comune A'; a tal uopo (in forza del post. d'ARCHIMEDE) basta considerare due grandezze B', C' comprendenti A', e quindi dividere successivamente per 2 la grandezza $D' = C' - B'$, formando le grandezze

$$B' + \frac{D'}{2}, \quad B' + \frac{D'}{4}, \quad B' + \frac{3D'}{4}, \text{ ecc.};$$

da questa serie si estraggono le successioni convergenti aventi per limite A'.

Ora a due successioni convergenti di Γ', formate con grandezze di G', corrispondono due successioni convergenti di Γ formate con grandezze di G, e quindi al limite comune A' di quelle successioni si può far corrispondere *un* elemento A di Γ, determinato come limite comune di queste. Con ciò si ottiene fra Γ' e Γ una corrispondenza univoca ordinata, dove a due qualsiansi grandezze di Γ' corrispondono due grandezze *proporzionali* di Γ; e questa corrispondenza non è generalmente invertibile, se non per gli elementi di una parte di Γ.

Dunque: *Ogni sistema di grandezze divisibili soddisfacente ai postulati* 1).... 5), *si può porre in corrispondenza proporzionale con una parte di una serie continua* (cioè di una serie soddisfacente anche al post. 6); o, in altri termini: *ogni sistema di grandezze divisibili soddisfacenti ai post.* 1).... 5), *si può astrattamente ritenere come parte di un sistema continuo, contenente tutte le grandezze possibili* (compatibilmente colle relazioni poste), *questo sistema integro corrispondendo all'ipotesi di* CANTOR 6).

Insomma il *postulato di continuità di* CANTOR *esprime l' integrità del sistema di grandezze* per cui si suppone valido.

Il ragionamento precedente prova anche che tutti i sistemi di grandezze, soddisfacenti ai post. 1).... 6) si possono porre l'uno coll'altro in *corrispondenza biunivoca proporzionale*, ed *astrattamente* ritenersi come *identici* dando luogo perciò agli stessi numeri; in particolare *ogni sistema Γ si può riferire proporzionalmente al sistema delle grandezze segmentarie*, rappresentate dai segmenti di una semiretta con una data origine.

In tale riferimento i postulati di somma e sottrazione delle grandezze si traducono nei postulati della congruenza segmentaria

Digitized by Google

(Articolo Terzo). Quindi in virtù degli sviluppi dell' Articolo Quinto possiamo affermare che:

*L'insieme dei postulati d'*ARCHIMEDE *e di* CANTOR 5), 6), *per un sistema di grandezze Γ soddisfacente ai post.* 1).... 4), *si può esprimere col postulato di continuità di* DEDEKIND, nella forma seguente:

se il sistema Γ viene diviso in due classi contigue, per modo che

a) ogni grandezza appartenga ad *una* delle due classi;

b) ogni grandezza della seconda classe sia maggiore di ciascuna delle grandezze della prima,

allora esiste un *massimo* delle grandezze della prima classe, o un *minimo* delle grandezze della seconda.

Il postulato di DEDEKIND si può considerare come una proprietà della *serie* delle grandezze disposte per ordine crescente e corrisponde ad una proprietà ordinale della serie dei segmenti o dei punti della retta o dei numeri, proprietà che darà luogo più avanti a nuove osservazioni.

§ 38. **Espressione degli irrazionali per frazione continua.** — L'integrità della serie dei numeri determinati come rapporti di grandezze d' un sistema continuo, corrisponde anche al fatto che si può costruire una generale espressione aritmetica dei numeri irrazionali, dipendente da una serie infinita di numeri naturali, nella quale questi numeri possono assumere tutti i valori possibili.

Una tale espressione aritmetica ci è fornita dal processo euclideo delle divisioni successive.

Si abbiano due grandezze

$$A,\ B,\quad A > B.$$

La divisione di A per B dà

$$A = aB + R_1 \qquad (a \text{ intero, } R_1 < B);$$

quindi proseguendo successivamente la divisione di B per R_1 e così di seguito:

$$\begin{aligned} B &= a_1 R_1 + R_2 \qquad (R_2 < R_1) \\ R_1 &= a_2 R_2 + R_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Digitized by Google

Quando questo processo ha termine, A e B sono commensurabili e si ha

$$A : B = \mathrm{a} + \cfrac{1}{\mathrm{a}_1 + \cfrac{1}{\mathrm{a}_2 + \ddots + \cfrac{1}{\mathrm{a}_n}}}.$$

Quando le due grandezze sono incommensurabili, il processo illimitato delle divisioni successive simboleggiate dalla *frazione continua*:

$$\alpha = \mathrm{a} + \cfrac{1}{\mathrm{a}_1 + \cfrac{1}{\mathrm{a}_2 + \cfrac{1}{\mathrm{a}_3 + \ddots + \cfrac{1}{\mathrm{a}_n + \ddots}}}} \qquad (\mathrm{a}_i \geq 1)$$

si assumerà come espressione aritmetica del numero irrazionale

$$\alpha = A : B.$$

Questa definizione si basa sopra il teorema:

La frazione continua α *corrisponde univocamente al rapporto* A : B, *cioè se l'algoritmo euclideo delle divisioni successive applicato ad* A′, B′ *conduce alla frazione continua* α, *si ha*:

$$A : B = A' : B',$$

e viceversa.

Per dimostrare questo teorema si suppongano date A, B, B' e si determini A_1 in guisa che

$$A : B = A_1 : B';$$

si tratta di provare che

$$A_1 = A'.$$

Digitized by Google

A tale scopo si considerino le successive *ridotte* della frazione continua $\alpha - \mathrm{a}$:

$$\frac{p_n}{q_n} = \cfrac{1}{\mathrm{a}_1 + \cfrac{1}{\mathrm{a}_2 + \ddots + \cfrac{1}{\mathrm{a}_n}}};$$

si ha (in valore assoluto)

$$(A' - A_1) < \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right)$$

Ora la legge di formazione delle successive ridotte di $\alpha - \mathrm{a}$ è data dalle relazioni ricorrenti

$$p_n = \mathrm{a}_n p_{n-1} + p_{n-2}$$
$$q_n = \mathrm{a}_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

che si dimostrano verificandole per $n = 3$ e mostrando che, se esse sussistono per un certo valore di n, sussistono anche per $n + 1$, cioè quando si cambia a_n in $\mathrm{a}_n + \dfrac{1}{\mathrm{a}_{n+1}}$.

Si ha quindi

$$p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

e perciò

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}};$$

in conseguenza risulta che le successioni

$$\frac{p_2}{q_2}, \frac{p_4}{q_4}, \ldots.$$
$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots.$$

sono convergenti ed ammettono un limite comune; così, essendo in valore assoluto

$$A' - A_1 < \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{n(n+1)},$$

Digitized by Google

per qualunque valor di n, si ha

$$A' - A_1 = 0 \qquad \text{c. d. d.}$$

Vediamo di più che:

Ogni frazione continua

$$a = \mathrm{a} + \cfrac{1}{\mathrm{a}_1 + \cfrac{1}{\mathrm{a}_2 + \ddots}},$$

dove $\mathrm{a} \geq 0$ *ed* $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2 \ldots$ *assumono qualsiasi valore* ≥ 1, *rappresenta un numero irrazionale* che si può determinare come rapporto di una certa grandezza A alla grandezza B assunta in Γ come unità di misura.

Infatti le due successioni di grandezze

$$\left(\mathrm{a} + \frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)B$$

$$\left(\mathrm{a} + \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right)B \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots),$$

sono convergenti ed il loro limite comune è una grandezza A tale che

$$A : B = a.$$

Nota. — Anche in altri modi si può assegnare un'espressione aritmetica infinita dei numeri irrazionali: ad es. ricorrendo alle *divisioni successive per eccesso.*

Supposto per semplicità $A < B$, si consideri il minimo multiplo

$$\mathrm{a}_1 A > B \qquad (\mathrm{a}_1 \geq 2)$$

e si scriva quindi

$$\mathrm{a}_1 A = B + R_1 \quad \text{con} \quad R_1 < B;$$

analogamente si ponga

$$\mathrm{a}_2 R_1 = B + R_2 \quad \text{con} \quad \mathrm{a}_2 \geq 2, \quad R_2 < B_2,$$

e così di seguito.

Digitized by Google

L'algoritmo conduce alla *frazione continua ascendente*

$$A:B=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots}}}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1 a_2}+\frac{1}{a_1 a_2 a_3}+\ldots,$$

la quale termina dopo un numero finito di divisioni successive se A e B sono commensurabili: l'algoritmo infinito rappresenta il rapporto irrazionale $A:B$ se A e B sono incommensurabili.

Una espressione di questo genere è la nota espressione del numero irrazionale

$$e=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots}}}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots,$$

base dei logaritmi neperiani.

II. — Numeri irrazionali ordinali.

§ 39. **I numeri irrazionali come ascisse dei punti della retta.** — Il sistema totale dei numeri reali e positivi permette di far corrispondere ai punti d'una semiretta di origine 0, i numeri-ascisse, che esprimono, per ogni punto X, il rapporto del segmento $0X$ al segmento unità $0A$.

Attribuendo ai suddetti numeri un segno, si riesce anche alla completa rappresentazione biunivoca ed ordinata della serie dei punti della retta col sistema dei numeri reali.

Da questo punto di vista i numeri reali appariscono come *numeri ordinali*, designando il posto occupato dai punti nella serie « retta punteggiata ».

Si può costruire una teoria ordinale dei numeri reali, prendendo come punto di partenza le seguenti ipotesi:

1) È data sulla retta una serie razionale S di punti, *ovunque densa*, cioè tale che fra due punti della retta (entro ogni segmento) vi sia qualche punto di S.

Digitized by Google

2) La retta è una serie di punti continua nel senso di DEDEKIND, cioè: se la retta (o un segmento di essa) è divisa in due parti formanti due classi contigue, per modo che: *a*) ogni punto appartenga ad *una* delle due parti; *b*) tutti i punti di una parte precedano (nell'ordine della retta) a quelli della seconda; allora esiste un *punto di separazione* delle due classi, che è ultimo della prima classe o primo della seconda.

In tali ipotesi si ha:

ogni punto non avente un'ascissa razionale *divide* la serie S dei punti razionali in *due parti* che formano due *classi contigue*, diguisachè: *a*) ogni punto razionale appartiene all'una *o* all'altra parte; *b*) i punti della prima classe precedono a ciascun punto della seconda, cioè le ascisse dei primi sono minori di quelle dei secondi.

Viceversa:

se la serie dei punti razionali viene divisa in due parti formanti classi contigue, si ottiene anche una divisione in parti contigue della retta e quindi, in forza del postulato della continuità, esiste un *punto di separazione*: il quale può dar luogo a due casi, secondochè:

a) appartiene ad una delle due classi contigue di punti razionali, e quindi è l'*ultimo* punto della prima o il *primo della* seconda;

oppure *b*) non appartiene al sistema dei punti razionali e però consegue a tutti i punti della prima classe e precede a tutti quelli della seconda.

Per designare il posto occupato nella serie dei punti della retta dai punti non razionali, si possono introdurre i numeri irrazionali, come numeri d'ordine corrispondenti alle partizioni dei numeri razionali in classi contigue.

Si ottiene così la definizione seguente:

Sia data una serie continua d'elementi Σ e, sopra a questa, una serie S in corrispondenza ordinata coi numeri razionali che formi un *insieme denso* su Σ (in guisa che fra due elementi di Σ sia sempre compreso qualche elemento di S); allora il posto di ogni elemento di Σ rispetto ad S è determinato in modo che, data un'altra serie continua Σ' contenente un analogo sistema S', vi è fra Σ e Σ' una determinata corrispondenza ordinata in cui si corrispondono gli elementi di S, S' portanti lo stesso numero (razionale).

Associando per tal modo tutte le possibili serie analoghe Σ,

Digitized by Google

Σ'..., si dà luogo al *concetto astratto di un elemento di Σ considerato nell'ordine della serie rispetto ad* S; questo concetto astratto generalizzante il numero razionale ordinale, è il *numero ordinale reale*: razionale ed irrazionale.

Se l'ordine della serie si esprime colla relazione « *maggiore* » ($>$) e « *minore* » ($<$), il *numero irrazionale* è per definizione *maggiore di tutti i numeri razionali* che corrispondono agli elementi precedenti e *minore di tutti i numeri razionali seguenti*, i numeri razionali maggiori e minori formando le due classi contigue che lo definiscono.

§ 40. **Somma e prodotto.** — Le operazioni sui numeri irrazionali, o su irrazionali e razionali, risultano definite dalla condizione che *valgano per tutti i numeri reali e positivi le disuguaglianze seguenti*: se

$$a > b,$$
$$a + c > b + c$$
$$ac > bc.$$

In forza di queste disuguaglianze si definiranno le operazioni sui numeri reali e positivi come segue; si aggiungeranno poi la regola dei segni e la legge d'annullamento:

$$a \,.\, 0 = 0.$$

Si abbiano due numeri reali α, β e si considerino tutti i numeri razionali a, a', b, b', per cui

$$a < \alpha < a'$$
$$b < \beta < b',$$

sarà

$$a + b < \alpha + \beta < a' + b', \quad ab < \alpha\beta < a'b',$$

e queste disuguaglianze definiscono in generale la *somma* $\alpha + \beta$ e il *prodotto* $\alpha\beta$. Infatti:

1) per il postulato di continuità la serie Σ contiene un elemento x che consegue agli $a + b$ e precede gli $a' + b'$, e così pure un elemento y che consegue agli ab e precede gli $a'b'$;

2) non vi possono essere due elementi, x, x_1, di Σ compresi

Digitized by Google

fra $a + b$, $a' + b'$ o fra ab, $a'b'$; altrimenti si avrebbe nel primo caso (supposto $x \geq x_1$) :

$$x - x_1 < (a' + b') - (a + b)$$
$$x - x_1 < (a' - a) + (b' - b),$$

mentre si possono scegliere a, a', b, b' in guisa che sia

$$\alpha - a < \frac{x - x_1}{4} \qquad a' - \alpha < \frac{x - x_1}{4}$$
$$\beta - b < \frac{x - x_1}{4} \qquad b' - \beta < \frac{x - x_1}{4},$$
$$a' - a < \frac{x - x_1}{2} \qquad b' - b < \frac{x - x_1}{2};$$

e similmente si avrebbe nel secondo caso

$$x - x_1 < a'b' - ab$$
$$x - x_1 < (a' - a)\, b + (b' - b)\, a + (a' - a)\,(b' - b),$$

mentre si possono scegliere a, a', b, b' in guisa che sia

$$a' - a < \frac{x - x_1}{3b} \qquad b' - b < \frac{x - x_1}{3a}$$
$$(a' - a)\,(b' - b) < \frac{x - x_1}{3},$$

e quindi

$$(a' - a)b + (b' - b)a + (a' - a)\,(b' - b) < x - x_1.$$

È poi chiaro che la somma e il prodotto sopra definiti pei numeri reali soddisfano sempre alle proprietà fondamentali : commutativa, associativa e distributiva.

§ 41. **Continuità e buon ordinamento di una serie.** — La proprietà della serie dei numeri interi relativi di essere quasi ben ordinata (cioè ben ordinata a parte l'esistenza d'un primo termine della serie totale) si lascia decomporre nelle due affermazioni seguenti :

Digitized by Google

1) dopo ogni numero vi è *un* successivo;

2) se la serie dei numeri è divisa in due parti formanti due *classi contigue*, vi è fra queste un *elemento di separazione*, potendosi assumere ad arbitrio come tale il massimo della prima classe o il minimo della seconda.

Quest'ultimo enunciato è identico al postulato di DEDEKIND, che si pone ad affermare la *continuità* di una serie in cui (contrariamente all'ipotesi 1) si trovino elementi compresi tra due qualsiansi.

Già nella costruzione della serie dei numeri razionali, che estende quella dei numeri interi, si lascia cadere volontariamente la proprietà 1), assumendo che fra due elementi qualsiansi sia sempre compreso qualche elemento intermedio.

Dopo ciò si constata che cade anche la proprietà 2), giacchè per es. i numeri $> \sqrt{2}$ e $< \sqrt{2}$ danno luogo ad una divisione della classe razionale in due classi contigue, che non ammette entro questa un elemento di separazione.

Col postulato di continuità si ammette che: *data una serie razionale di elementi* S, *sia possibile determinare una serie continua che la contiene*, per modo che:

a) fra due elementi della serie totale si trovi sempre qualche elemento intermedio;

b) questa serie soddisfi alla proprietà 2) (postulato di DEDEKIND).

Dunque *il postulato di* DEDEKIND *esprime che la proprietà della serie degli interi, successivi ad un intero qualsiasi, di essere ben ordinata, si ritrova in una classe più estesa contenente quella dei numeri razionali.*

Ora giova fare la seguente avvertenza. È possibile che esistano diverse serie continue contenenti la serie razionale S; ma una serie Σ sopra cui S sia *ovunque densa*, è *minima* fra tutte le serie anzidette, nel senso che in ognuna di queste si può trovare una parte in corrispondenza ordinata con Σ (gli elementi di S corrispondendo a sè stessi).

In altre parole: *l'aggiunta dei numeri irrazionali ai numeri razionali dà luogo alla minima estensione della serie di questi che renda soddisfatto il postulato di continuità* (*di* DEDEKIND).

D'altra parte se si suppone che una serie contenente una serie razionale possa riguardarsi come una serie di grandezze, il postulato di DEDEKIND (o quello di CANTOR che ne deriva come

Digitized by Google

conseguenza) porta, come abbiam visto, che la serie continua abbia la massima estensione possibile; perciò se una serie razionale S è contenuta in una serie continua Σ, e gli elementi di questa possono ritenersi formare un sistema di grandezze ordinate secondo i postulati di somma e sottrazione, S dovrà esser ovunque densa sopra Σ.

Questa affermazione si riduce in sostanza al teorema (dimostrato nell'Articolo Quinto per i segmenti) che il postulato di DEDEKIND porta come conseguenza quello di ARCHIMEDE.

Per un'analisi approfondita delle proprietà che definiscono il continuo numerico come serie ordinata, cfr. IV, § 46.

III. — LE TEORIE ANALITICHE DEI NUMERI IRRAZIONALI.

§ 42. **La teoria di Dedekind.** — La teoria dei numeri irrazionali ordinali che sopra abbiamo costruito, non è altro che un'esposizione della teoria di DEDEKIND (l. c., 1872) secondo una veduta sintetica. Ma l'A., che pure ha dato col postulato di continuità la base di questa concezione sintetica (soggiacente, per così dire, alla sua costruzione) introduce i numeri irrazionali mediante semplici convenzioni, mostrando così che il postulato esistenziale, legato alla intuizione del continuo rettilineo, non è affatto necessario. Infatti, partendo dalla serie dei numeri razionali, egli riesce a *costruire una serie continua minima* che la contenga, ed edifica così una *teoria analitica dei numeri irrazionali* (1).

(1) La teoria di DEDEKIND è stata svolta in diverse esposizioni p. es. da ULISSE DINI nei *Fondamenti di una teorica delle funzioni di variabile reale* (Pisa, 1878), da JULES TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* (2ª ed., 1904, Ch. II: la 1ª ed. risale al 1886), come pure da GREGORIO RICCI in due memorie degli «Atti del R. Istituto Veneto», serie VII, 18, e del «Giornale di Napoli», vol. 34.

ALFREDO CAPELLI nel *Saggio sulla introduzione dei numeri irrazionali col metodo delle classi contigue* («Giornale di Napoli», 1897) e nelle *Lezioni sui numeri reali*». Estratto dalle «Istituzioni d nalisi algebrica», Napoli, 1903, ha modificato il metodo di DEDEKIND fondendolo per così dire con quello di CANTOR, in quanto egli intende per «classi contigue» due classi in cui si trovano elementi vicini quanto si vuole, senza esigere che esse comprendano nel loro insieme tutti i numeri (ciò che dispensa dall'enunciare esplicitamente la condizione d'avvicinamento). Questo metodo, sebbene a nostro avviso *non* rappresenti *un miglioramento* di quello di DEDEKIND, ha trovato qualche favore nei trattati scolastici italiani.

Digitized by Google

Esponiamo i principî di questa teoria:

1) Ad ogni numero razionale a, corrisponde una *partizione o sezione del campo dei numeri razionali in due classi contigue*, che si ottiene ponendo nella prima classe tutti i numeri $\leq a$, e nella seconda i numeri $> a$.

La partizione in classi contigue soddisfa alle due proprietà fondamentali che: ogni numero razionale appartiene ad una e ad una sola delle due classi, e che ogni numero della prima classe è minore di ciascun numero della seconda. La partizione da noi definita in rapporto ad un numero razionale ha questo numero come *massimo*.

2) Consideriamo tutte le possibili partizioni dei numeri razionali in classi contigue, escludendo le partizioni in cui la seconda classe ha un minimo.

Tutte le partizioni anzidette si possono riguardare come gli elementi di una serie Σ. La quale viene ordinata in base alla seguente convenzione: date due partizioni (aa'), (bb') si pone

$$(bb') > (aa')$$

se esistono un b ed un a' tali che

$$b > a'.$$

(Nell' ipotesi opposta o $(aa') > (bb')$, oppure si ha sempre

$$a < b', \quad a' < b$$

e le due partizioni coincidono).

3) La serie Σ contiene un sistema S di elementi corrispondenti ordinatamente ai numeri razionali: sono le « partizioni » in cui la classe inferiore ha un massimo. Gli altri elementi di Σ sono definiti dal posto che occupano rispetto ad S, poichè ciascuno di essi separa gli elementi di S in due classi contigue corrispondenti a quelle di numeri razionali da cui è definito.

Ciò posto *gli elementi di* Σ (« partizioni » dei numeri razionali) sono ordinati in guisa che i loro numeri d'ordine *definiscono* per astrazione *i numeri reali*, aggiungendo ai numeri razionali, che corrispondono agli elementi di S, i *numeri irrazionali*, che corrispondono a « partizioni dei numeri razionali in classi contigue non dotate di massimo (nè di minimo) ».

Digitized by Google

Dal § 39 segue che la serie Σ è astrattamente identica alla serie dei numeri reali ordinali che nascono come ascisse dei punti della retta.

Ora si definiranno le operazioni sui numeri reali riferendosi per semplicità ai numeri reali positivi ed aggiungendo poi la regola dei segni e la convenzione

$$a0 = 0.$$

Lemma. — Se un numero a è definito dalle classi contigue (aa') si può sempre trovare un numero a ed un a' che differiscano fra loro di un numero $\frac{1}{n}$ piccolo ad arbitrio.

Infatti si costruisca la serie dei multipli di $\frac{1}{n}$; in questa si troveranno due multipli consecutivi, uno appartenente alla classe (a) l'altro ad (a').

Ciò posto siano dati due numeri reali e positivi α, β, definiti per mezzo delle classi contigue di numeri razionali e positivi

$$(aa') \quad \text{e} \quad (bb').$$

Formiamo le classi

$$(a + b) \quad (a' + b').$$

Se ogni numero razionale (positivo) appartiene all'una o all'altra di dette classi, queste sono classi contigue $(a' + b' > a + b)$ ed esiste quindi un numero irrazionale:

$$(a + b, \quad a' + b'),$$

che si definirà come *somma*

$$(aa') + (bb').$$

Pongasi invece che esista un numero razionale

$$x > a + b, \quad x < a' + b';$$

in tal caso si dimostra che non vi può essere un secondo numero

$$x_1 > a + b, \quad x_1 < a' + b'.$$

Digitized by Google

Infatti, supposto

$$x > x_1,$$

si avrà

$$x - x_1 > \frac{1}{n}$$

(n intero assai grande), e quindi

$$a' + b' - (a + b) > \frac{1}{n}$$

mentre si possono scegliere a, a', b, b' in guisa che sia

$$a' - a = \frac{1}{2n}, \quad b' - b = \frac{1}{2n}$$

$$(a' + b') - (a + b) = \frac{1}{n}.$$

Pertanto, se esiste x, si attribuirà, come massimo, alla classe $(a + b)$, e si porrà

$$x = (a + b, a' + b') = (aa') + (bb').$$

Parimente, per definire il prodotto, formiamo le classi

$$(ab) \quad (a'b').$$

Se ogni numero razionale appartiene all'una o all'altra, queste sono classi contigue ed esiste quindi un numero irrazionale

$$(aa', \quad bb').$$

che si definirà come *prodotto*

$$(aa'). \quad (bb').$$

Pongasi invece che esista un numero razionale

$$x > ab, \quad x < a'b' ;$$

in tal caso si dimostra che non può esistere un secondo numero x_1 tale che

$$x_1 > ab, \quad x_1 < a'b'.$$

Digitized by Google

Infatti, supposto

$$x > x_1,$$

si avrà

$$x - x_1 > \frac{1}{n}$$

(n intero assai grande) e quindi

$$a'b' - ab > \frac{1}{n};$$

ma, all'opposto, preso un intero m comunque grande si possono scegliere a, a', b, b' in guisa che sia

$$a' - a = \frac{1}{m}, \quad b' - b = \frac{1}{m}$$

e però

$$(a' - a)(b' - b) = \frac{1}{m^2};$$

allora sarà

$$a'b' - ab = (a' - a)b + (b' - b)a +$$
$$+ (a' - a)(b' - b) = \frac{b}{m} + \frac{a}{m} + \frac{1}{m^2},$$

e quindi si potrà rendere

$$a'b' - ab < \frac{1}{n}$$

È poi chiaro che l'addizione e la moltiplicazione così estese ai numeri reali soddisfano alle proprietà fondamentali di queste operazioni.

§ 43. **Teoria di Méray-Cantor.** — La teoria degl'irrazionali di Dedekind è preferibile a tutte le altre teorie analitiche:

1) per la corrispondenza immediata ch'essa ha colla teoria ordinale (rappresentazione numerica del continuo rettilineo);

2) per il legame concreto che essa pone fra il numero irrazionale e una determinata partizione che gli corrisponde;

3) per la semplicità che ne deriva nella definizione delle operazioni di somma e prodotto.

Tuttavia da altri punti di vista sono apprezzabili anche le teorie di Weierstrass e di Méray-Cantor che introducono gl'ir-

Digitized by Google

razionali facendo capo ai *processi d'approssimazione* più direttamente usati nei calcoli.

La teoria di MÉRAY-CANTOR (l. c., 1872) considera esplicitamente il numero irrazionale come *numero-limite d'una successione convergente di numeri razionali*, nel modo più generale. Se

$$a_1\ a_2 \ldots\ a_n \ldots\ a_{n+r} \ldots$$

è una successione che ammette un limite razionale l, per ogni ε, piccolo ad arbitrio, si può sempre trovare un m abbastanza grande in modo che quando

$$n > m$$

sia in valore assoluto

$$|l - a_n| < \varepsilon.$$

Di qui si deduce che, per $n > m$, si ha anche, qualunque sia r,

$$|a_n - a_{n+r}| < \varepsilon.$$

Orbene, se questa condizione è soddisfatta e non esiste un numero razionale

$$l = \lim a_n,$$

si può tuttavia introdurre un *numero-limite di nuova specie*, che si dirà appunto un *numero irrazionale*: naturalmente per tali numeri occorre definire «l'uguaglianza», rispetto a cui essi vengono definiti per astrazione, e le operazioni fondamentali dell'Aritmetica, in guisa da conservarne le proprietà formali.

Questo modo di costruzione, in un senso puramente analitico, è stato svolto, nello stesso tempo che da MÉRAY e CANTOR, anche da HEINE (1), che tuttavia dichiara di utilizzare le vedute comunicategli verbalmente da WEIERSTRASS e da CANTOR, e che insiste sul carattere formale della teoria, in cui si chiamano numeri soltanto dati «segni» scambiabili con determinate regole operative.

Altre esposizioni della teoria trovansi nei trattati di R. LIPSCHITZ (2) e di O. STOLZ (3). In Italia il primo sviluppo di essa è

(1) «Journal für Mathematik», tome 74, p. 192, 1872.
(2) *Grundlage der Analysis*, Bonn, 1877.
(3) *Vorlesungen*, op. cit., 1885.

Digitized by Google

dovuto ad A. GRANDI (1) e poi a C. ARZELÀ (2). Ora, già in LIPSCHITZ e in ARZELÀ e ancor più in esposizioni posteriori, appare la tendenza, didatticamente giustificata, a ricondurre la considerazione generale della successione

$$a_1\ a_2 \ldots.\ a_n \ldots,$$

a quella di *due successioni monotone, l'una sempre crescente e l'altra decrescente, convergenti ad un limite comune.*

A questa considerazione più determinata si è condotti invero — per semplice decomposizione — nel caso d'una successione oscillante, e in altro modo anche nel caso d'una successione monotona

$$a_1\ a_2 \ldots\ a_n \ldots;$$

poichè se questa è, per esempio, una successione crescente a termini positivi, i cui elementi tendano al limite con approssimazioni convenienti $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots\ \varepsilon_n \ldots$ (lim. $\varepsilon_n = 0$), si potrà avere una successione decrescente

$$a_1 + \varepsilon_1,\ a_2 + \varepsilon_2, \ldots\ a_n + \varepsilon_n \ldots$$

che tende allo stesso limite.

D'altronde la determinazione d'un numero irrazionale come limite comune di due successioni convergenti corrisponde al caso più importante per la pratica, in cui il numero è definito con *procedimenti d'approssimazione per difetto e per eccesso,* quale è la misura delle grandezze o la frazione continua che ne porge l'espressione analitica.

Perciò daremo la preferenza a questo *modo d'esposizione della teoria di* MÉRAY-CANTOR.

Senza preoccuparci dell'algoritmo che le genera, consideriamo le *coppie di successioni convergenti*:

$$a_1 a_2 \ldots. a_n \ldots,\quad b_1 b_2 \ldots. b_m \ldots,$$

definite dalle condizioni seguenti:

1) i numeri della prima successione vanno indefinitamente crescendo, e quelli della seconda decrescendo; cioè

$$a_1 < a_2 < \ldots. < a_n \ldots,$$
$$b_1 > b_2 > \ldots. > b_m \ldots;$$

(1) *Cronache del R. Liceo Forteguerri di Pistoia,* 1874-75.
(2) Nel suo noto *Trattato elementare d'Algebra,* 1883.

Digitized by Google

2) i numeri della seconda successione sono tutti maggiori di quelli della prima:

$$b_m > a_n;$$

3) dato ad arbitrio un numero ε piccolo ad arbitrio si può determinare un numero s tale che per $n > s$, $m > s$, sia sempre

$$b_m - a_n < \varepsilon.$$

Dalla definizione precedente segue che la successione $a_1 a_2 \ldots$ non ammette un *massimo*, nè la $b_1 b_2 \ldots$ un *minimo*. Perciò, dato un numero razionale c, accade uno e uno solo dei tre casi seguenti:

α) vi è nella successione degli a un termine $a_n \geq c$; allora, per $m > n$, $a_m > c$;

β) vi è un $b_n \leq c$: allora, per $m < n$, $b_m < c$;

γ) per ogni valore di n

$$c > a_n, \quad c < b_n.$$

Nell'ipotesi γ) il numero c dicesi *numero-limite* delle successioni convergenti $a_1 a_2 \ldots$, $b_1 b_2 \ldots$: le differenze

$$c - a_n \quad \text{e} \quad b_n - c$$

divengono, per n assai grande, piccole ad arbitrio. È poi chiaro che non può esistere un secondo numero-limite c' delle medesime successioni, diverso da c; infatti se per es.

$$c > c',$$

sarebbe

$$c - a_n > c - c'$$

per qualunque valore di n, mentre si può trovare un n così grande per cui

$$c - a_n < b_n - a_n < c - c'.$$

Ora si confrontino due coppie di successioni convergenti

$$a_1 a_2 \ldots, \quad b_1 b_2 \ldots,$$
$$a'_1 a'_2 \ldots, \quad b'_1 b'_2 \ldots;$$

si avrà:

Digitized by Google

I) Se queste ammettono uno stesso numero-limite c, per ogni valore di n, m,

$$a_n < c < b_m, \qquad a'_n < c < b'_m;$$
$$a_n < b'_m, \qquad a'_n < b_m.$$

II) Viceversa, se la prima coppia di successioni convergenti ammette il numero-limite c, e se, per qualunque valore di n, m,

$$a_n < b_m', \quad a_n' < b_m$$

sarà anche c numero-limite della seconda coppia di successioni, cioè:

$$a_n' < c < b_m'.$$

Infatti, se così non fosse, il numero c si troverebbe rispetto alle successioni a', b' nell'ipotesi α) o β); fermandosi ad es. sulla prima ipotesi c'è un termine $a_n' > c$; ma allora il numero a_n' rispetto alle successioni a, b, non può trovarsi che nell'ipotesi β), cioè deve esistere un termine

$$b_m < a_n',$$

contro il supposto.

III) Astrazion fatta dall'esistenza d'un numero-limite c, le disuguaglianze

$$a_n < b_m', \quad a_n' < b_m,$$

pongono fra le due coppie di successioni convergenti una relazione (*equivalenza*) che è riflessiva, simmetrica e transitiva, cioè possiede gli attributi logici di un'uguaglianza.

Ciò posto il *concetto astratto delle coppie di successioni convergenti che si equivalgono* fornisce un concetto più generale del *numero-limite*, comprendente, accanto ai numeri *razionali* (coppie di successioni convergenti verso un numero intero o fratto), i numeri *irrazionali*, corrispondenti a coppie di successioni convergenti per cui non esiste un numero-limite razionale.

Le operazioni sui numeri reali (razionali ed irrazionali) si definiscono nel modo più semplice incominciando dal caso dei numeri positivi, limiti di successioni convergenti a termini positivi.

Si tratta di provare che date due coppie di successioni convergenti formate di numeri positivi:

$$a_1 a_2 \ldots, \quad b_1 b_2 \ldots,$$

Digitized by Google

e $$c_1c_2\ldots,\quad d_1d_2\ldots,$$

sono pure successioni convergenti le seguenti:

$$a_1 + c_1,\quad a_2 + c_2\ldots,\quad b_1 + d_1,\quad b_2 + d_2\ldots,$$

e

$$a_1c_1,\quad a_2c_2\ldots,\quad b_1d_1,\quad b_2d_2\ldots;$$

inoltre che: se le coppie di successioni convergenti

$$a_1'a_2'\ldots,\quad b_1'b_2'\ldots.$$

e

$$c_1'c_2'\ldots.\quad d_1'd_2'\ldots.$$

equivalgono rispettivamente alle precedenti a, b e c, d, sono pure equivalenti le coppie di successioni convergenti

$$a_1 + c_1,\quad a_2 + c_2\ldots,\quad b_1 + d_1,\quad b_2 + d_2\ldots.$$
$$a_1' + c_1',\quad a_2' + c_2'\ldots,\quad b_1' + d_1,\quad b_2' + d_2'\ldots,$$

e le

$$a_1c_1,\quad a_2c_2\ldots,\quad b_1d_1,\quad b_2d_2\ldots.$$
$$a_1c_1,\quad a_2'c_2'\ldots,\quad b_1'd_1',\quad b_2'd_2'\ldots.$$

Del resto gli sviluppi qui occorrenti si riconducono a quelli del DEDEKIND, per mezzo del seguente teorema che stabilisce il *Passaggio dalla teoria di* MÉRAY-CANTOR *a quella di* DEDEKIND.

A tutte le coppie equivalenti di successioni convergenti

$$a_1a_2\ldots,\quad b_1b_2\ldots.$$
$$a_1'a_2'\ldots.\quad b_1'b_2'\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

corrisponde una medesima partizione del campo dei numeri razionali in classi contigue, partizione ottenuta attribuendo alla prima classe ogni numero a che verifichi le disuguaglianze

$$a < b_n \qquad (n = 1, 2\ldots.),$$

oppure $$a < b_n'$$

e all'altra classe tutti gli altri numeri razionali b (per ciascun dei quali esiste un n tale che $b > b_n$, $b > b_n'$).

Digitized by Google

Viceversa tutte le coppie di successioni convergenti che determinano in questo senso una medesima partizione del campo dei numeri razionali in classi contigue, sono equivalenti.

Data una partizione dei numeri razionali in classi contigue (a, b) si potranno costruire due successioni convergenti corrispondenti allo stesso numero-limite operando come segue: si considerino tutte le frazioni di denominatore n e si distinguano quelle appartenenti alle classi (a) e (b); la massima delle prime e la minima delle seconde danno luogo a due numeri

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{m+1}{n};$$

al crescere di n, ad es. per $n = 10, 100....$, la prima frazione dà origine ad una successione crescente, e la seconda ad una successione decrescente: sono due successioni convergenti tendenti al limite (ab).

(Perchè si tratti di successioni realmente illimitate occorre solo far crescere n in modo conveniente nel caso in cui (ab) sia un numero razionale).

§ 44. **Sviluppi che si riattaccano alle idee del Weierstrass.** — Come già abbiamo accennato, accanto a CANTOR (che indipendentemente si riavvicina a MÉRAY) e probabilmente prima di lui, anche WEIERSTRASS aveva riflettuto sui numeri irrazionali, ed era riuscito a concepirli in qualche modo come numeri limiti. Tuttavia la successione tendente al limite è contenuta solo implicitamente nel concetto di WEIERSTRASS. In sostanza questi decompone un numero assoluto a in una *serie o somma di numeri frazionari assoluti*:

$$a = a_1 + a_2 + \quad .... + a_n + ... ;$$

ma concepisce a come riunione di infinite unità di specie diverse, cioè di un'*unità principale* che entra a costituire la parte intera e di *unità frazionarie*, ognuna delle quali entrerà in a, come *elemento*, un numero finito di volte. La somma di un numero qualunque di elementi di a ne costituirà una *parte integrante*, e si dirà *contenuto* in a ogni numero che sia una parte integrante o minore d'una parte integrante.

Il numero a è *finito* (cioè la serie è convergente) se si può trovare un numero, intero o frazionario, maggiore di una sua parte

Digitized by Google

integrante. L'uguaglianza, la disuguaglianza e le operazioni sui numeri finiti composti d'infiniti elementi, si definiscono quindi mediante le relazioni e operazioni sulle parti integranti.

Ora la teoria di WEIERSTRASS si lascia sviluppare naturalmente in una *teoria dei numeri reali assoluti definiti per mezzo di serie o somme d'un numero infinito di termini*, che può presentarsi come segue.

Una serie a termini positivi (o assoluti)

$$a_1 + a_2 + \ldots,$$

considerata nel campo dei numeri razionali, ammette un *limite* (*somma*) se esiste un numero razionale a tale che, dato un ε piccolo ad arbitrio, vi è un m così grande che per $n > m$

$$a - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) < \varepsilon,$$

la differenza che compare nel primo membro essendo positiva. Si scrive

$$a = \lim_{n=\infty} (a_1 + \ldots + a_n)$$

oppure

$$a = a_1 + a_2 + \ldots,$$

e si riconosce che, se

$$a' = \lim_{n=\infty} (a_1 + \ldots + a_n).$$

deve essere

$$a = a'.$$

Ora si consideri una serie

$$a_1 + a_2 + \ldots$$

che non ammette un limite razionale. Nasce la domanda: si può generalizzare il concetto del numero-limite d'una serie, trattando la serie anzidetta (senza limite razionale) come rappresentante un *oggetto logicamente possibile*? e più precisamente, si può far questo operando sulle serie nel modo che viene indicato dalla teoria delle serie possedenti un limite?

Digitized by Google

A queste domande non si può dare una risposta affermativa assolutamente generale, perchè le *serie divergenti* (prese in relazione alle regole operative anzidette) *non rappresentano oggetti logicamente possibili*, visto che il loro uso conduce a conseguenze assurde.

Ma le serie che posseggono un limite razionale rientrano tuttavia, come caso particolare, in una classe di serie « le *serie convergenti* », che rappresentano oggetti logicamente possibili e danno luogo ad una estensione della teoria dei numeri razionali. Quando si suppongono già introdotti i numeri irrazionali le serie convergenti si trattano come serie aventi un limite.

La nostra teoria si può riguardare come una *teoria delle serie convergenti* (a termini positivi) *fondata nel campo dei numeri razionali*. Ci limiteremo a indicare qui gli sviluppi occorrenti:

1) Le serie

$$a_1 + a_2 + \dots,$$

tendenti ad un numero-limite razionale danno luogo alle seguenti relazioni:

α) Soddisfano alla *condizione di convergenza*, che per esse si riduce all'esistenza d'un valore maggiorante M tale che, per qualunque n,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < M.$$

β) Serie

$$a_1 + a_2 + \dots,$$
$$b_1 + b_2 + \dots,$$

tendenti allo stesso limite soddisfano alla *condizione di equivalenza*. cioè: per ogni ε piccolo ad arbitrio esiste un n così grande che per $m > n$ sempre

$$|(a_1 + a_2 \dots + a_m) - (b_1 + b_2 \dots + b_m)| < \varepsilon.$$

Se questa condizione è soddisfatta ed una delle due serie ammette un limite razionale, questo è anche limite dell'altra serie.

γ) Date due serie

$$a_1 + a_2 \dots,$$
$$b_1 + b_2 \dots,$$

Digitized by Google

tendenti a limiti razionali, la somma e il prodotto di questi sono rispettivamente limiti delle serie

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots,$$
$$(a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \ldots.$$

2) Si considerino ora serie soddisfacenti alla condizione di convergenza 1) α); indipendentemente dall'esistenza di un numero razionale limite si può provare che:

α) Se due serie soddisfano alla condizione d'equivalenza (1) β)) e una di esse è convergente, anche l'altra è convergente.

β) La condizione d'equivalenza esprime fra le serie una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva.

γ) Date due serie soddisfacenti alla condizione di convergenza:

$$a_1 + a_2 + \ldots,$$
$$b_1 + b_2 + \ldots,$$

anche le serie

$$S_{ab} = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots,$$
$$P_{ab} = (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \ldots,$$

soddisfano alla medesima condizione.

d) Date due serie convergenti

$$a_1 + a_2 + \ldots.$$
$$b_1 + b_2 + \ldots.$$

se le serie

$$a_1' + a_2' + \ldots.$$
$$b_2' + b_2' + \ldots.$$

sono rispettivamente equivalenti ad esse, saranno pure equivalenti le serie

$$S_{ab}, \quad S_{a'b'}$$

e le

$$P_{ab}, \quad P_{a'b'}.$$

In base a queste proposizioni ogni serie convergente, insieme a quelle che le sono equivalenti, definisce un ente « il concetto astratto della classe di serie equivalenti », che si può riguardare come un *numero*, e sui « *numeri* » così introdotti sono definite le operazioni

Digitized by Google

dell'Aritmetica soddisfacenti alle note proprietà fondamentali; inoltre i suddetti «numeri» comprendono come caso particolare i numeri razionali.

NOTA. — Si può *passare* nel modo più rapido *dalla teoria degli irrazionali* che traduce, nel modo anzidetto, le idee di WEIERSTRASS *a quella di* DEDEKIND. Essendo data la serie a termini positivi

$$a_1 + a_2 + \ldots,$$

corrispondente ad un numero irrazionale, la partizione in classi contigue che corrisponde a questo numero si ottiene ponendo:

1) nella prima classe (inferiore) ogni numero razionale a per cui esiste un n tale che

$$a_1 + a_2 + \ldots. + a_n > a,$$

2) nella seconda classe (superiore) ogni numero b tale che per qualunque n

$$b > a_1 + a_2 + \ldots. + a_n.$$

§ 45. **Calcolo approssimato sui numeri decimali.** — Una determinazione particolare della teoria esposta nel precedente paragrafo, che sembra essere alla base delle idee di WEIERSTRASS e di CANTOR e che conduce a sviluppi assai semplici, consiste nel considerare i *numeri decimali con infinite cifre*, cioè le serie del tipo

$$\Sigma \frac{a_n}{10^n}$$

dove a_n assume uno dei dieci valori 0, 1.... 9.

I decimali *non periodici* corrispondono a numeri irrazionali.

Ora all' uso dei decimali con infinite cifre si riattaccano i principî del *calcolo delle approssimazioni* di cui vogliamo dare un cenno.

Osserveremo anzitutto che se di un numero a si trascurano le cifre decimali dopo la n^{ma}, si ha un *valore approssimato* di a a meno di $\frac{1}{10^n}$.

Ciò posto risolviamo le seguenti questioni:

1) Dati due numeri a e b, quante cifre decimali occorre calcolare di essi per avere un valore approssimato di $a + b$ a meno di $\frac{1}{10^n}$?

Digitized by Google

Sommando $a - \varepsilon_1$ e $b - \varepsilon_2$, si ha

$$a + b - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

e se

$$\varepsilon_1 < \frac{1}{10^x} \quad \varepsilon_2 < \frac{1}{10^y}$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \frac{1}{10^x} + \frac{1}{10^y}.$$

Affinchè sia

$$\frac{1}{10^x} + \frac{1}{10^y} < \frac{1}{10^n}$$

basta prendere

$$x \geq n + 1, \; y \geq n + 1.$$

Dunque per rispondere alla domanda *si calcoleranno* n + 1 *cifre decimali* di a e b.

2) Quante cifre decimali occorre calcolare di a, b per avere un valore approssimato del prodotto ab a meno di $\frac{1}{10^n}$?

Moltiplicando

$$a - \varepsilon_1, \; b - \varepsilon_2,$$

si ha

$$(a - \varepsilon_1)(b - \varepsilon_2) = ab - (\varepsilon_1 b + \varepsilon_2 a - \varepsilon_1 \varepsilon_2).$$

Posto

$$\varepsilon_1 < \frac{1}{10^x} \quad \varepsilon_2 < \frac{1}{10^y},$$

si tratta di ridurre

$$\frac{b}{10^x} + \frac{a}{10^y} < \frac{1}{10^n}.$$

Perciò *se le parti intere di* a *e* b *contengono rispettivamente* r, s *cifre* ($a < 10^r$, $b < 10^s$), basterà prendere

$$x - s < n, \; y - r < n$$
$$x = n + s + 1, \; y = n + r + 1;$$

dunque *si calcoleranno* a *e* b *rispettivamente con* n + s + 1 *e con* n + r + 1 *cifre decimali.*

Digitized by Google

In particolare: se a è un numero di r cifre seguìto da decimali, per calcolare a^2 a meno di $\frac{1}{10^n}$ basta tenere $n + r + 1$ cifre decimali di a.

3) Si voglia calcolare un valore approssimato di $\sqrt{a}$ a meno di $\frac{1}{10^n}$, si domanda quante cifre decimali occorre tenere nel numero a, ed a quale approssimazione è sufficiente spingere il calcolo della radice. Pongasi

$$a = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots.$$
$$\varepsilon = 0{,}00 \ldots. 0_s a_{s+1} a_{s+2} \ldots.$$

e quindi sia

$$a - \varepsilon = a_0, a_1 a_2 \ldots. a_s,$$

il valore approssimato di a a meno di $\frac{1}{10^s}$.

Pongasi ancora

$$\sqrt{a - \varepsilon} = b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots.$$
$$\tau = 0, 0\,0 \ldots. 0_t b_{t+1} b_{t+2} \ldots,$$

sicchè

$$\sqrt{a - \varepsilon} - \tau = b_0, b_1 b_2 \ldots. b_t$$

sarà il valore approssimato di $\sqrt{a - \varepsilon}$ a meno di $\frac{1}{10_t}$.

Infine pongasi

$$\sqrt{a} - b_0, b_1 b_2 \ldots. b_t = \sigma,$$

per modo che σ designa la differenza fra $\sqrt{a}$ e il suo valore approssimato:

$$\sqrt{a} - (\sqrt{a - \varepsilon} - \tau) = \sigma,$$

cioè

$$\sqrt{a} - \sqrt{a - \varepsilon} = \sigma - \tau.$$

Moltiplichiamo i due membri di quest'uguaglianza per

$$\sqrt{a} + \sqrt{a - \varepsilon},$$

avremo

$$\varepsilon = (\sigma - \tau)(\sqrt{a} + \sqrt{a - \varepsilon})$$

Digitized by Google

e poichè

$$\sqrt{a}+\sqrt{a-\varepsilon} > 2\sqrt{a-\varepsilon},$$

si ricava

$$\varepsilon > 2(\sigma-\tau)\sqrt{a-\varepsilon}.$$

Per approfondire l'analisi conviene distinguere i due casi:

I) la parte intera di a sia $a_0 > 0$,

II) la parte intera di a sia nulla:

$$a_0 = 0.$$

I) Sia $a_0 \geq 1$.

Dalla relazione precedente si deduce

$$\varepsilon > 2(\sigma-\tau)\sqrt{a_0},$$

$$\sigma < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{a_0}} + \tau,$$

e *a fortiori*

$$\sigma < \varepsilon + \tau,$$

Ora perchè resulti

$$\sigma < \frac{1}{10^n}$$

basterà che si abbia

$$\frac{\varepsilon}{2\sqrt{a_0}} < \frac{1}{10^{n+1}}, \qquad \tau < \frac{1}{10^{n+1}}$$

e quindi

$$\varepsilon < \frac{2\sqrt{a_0}}{10^{n+1}}.$$

Supposto quindi che il numero a_0 sia di r cifre, sicchè

$$10^{r-1} \leq a_0,$$

e posto

$$q = \left[\frac{r-1}{2}\right],$$

$$10^{2q} \leq 10^{r-1},$$

si ricava

$$10^{2q} \leq a_0,$$

$$10^q \leq \sqrt{a_0},$$

Digitized by Google

e perciò si raggiungerà la voluta approssimazione prendendo

$$\varepsilon < \frac{1}{10^{n+1-q}}.$$

In conclusione: *se la parte intera del radicando è di* r (> o) *cifre si avrà* $\sqrt{a}$ *approssimata a meno di* $\frac{1}{10^n}$, *ritenendo*

$$n + 1 - \left[\frac{r-1}{2}\right]$$

cifre decimali di a *e calcolando la radice con* n + 1 *cifre decimali.*

II) Sia $a_0 = 0$.

Questo caso si tratta analogamente, introducendo la prima cifra decimale non nulla, a_p, del radicando a: *per avere* $\sqrt{a}$ *coll'approssimazione di* $\frac{1}{10^n}$, *è sufficiente ritenere le prime* n + 1 + p *cifre decimali di* a *e calcolare la radice con* n + 1 *cifre decimali* (1).

IV. — La potenza del continuo.

§ 46. **Continuo numerico.** — Colla progressiva estensione del concetto di numero abbiamo costruito successivamente

1) la classe dei numeri interi relativi,
2) la classe dei numeri fratti o razionali,
3) la classe dei numeri reali (razionali e irrazionali).

Si possono comparare queste classi alla classe dei numeri naturali 1, 2, 3..., dal punto di vista della loro *potenza* (Cantor), domandandosi se si può stabilire una corrispondenza biunivoca (non ordinata) fra i numeri naturali e i numeri delle classi 1) 2) 3).

Abbiamo già avuto occasione di dimostrare (§. 30) che:

L'insieme dei numeri razionali (e in particolare quello dei numeri interi e relativi) è numerabile.

Ora dimostreremo che:

L'insieme di tutti i numeri reali o anche solo l'insieme dei numeri reali compresi fra 0 *e* 1, *non è numerabile.*

(1) Cfr. A. La Barbera, *Calcolo approssimato delle radici dei numeri reali nel sistema decimale.* « Periodico di Matematiche », vol. III, n. 4 (1923). Vedasi anche l'opuscolo dello stesso A. sulla *Teoria dei numeri reali.* Per una più estesa trattazione dei problemi d'approssimazione si può vedere: E. Maccaferri, *Calcolo numerico approssimato.* U. Hoepli, Milano, 1919.

Digitized by Google

Consideriamo tutti i numeri reali fra 0 e 1 scrivendoli sotto forma di decimali con infinite cifre. Suppongasi che questo insieme possa essere ordinato in guisa che ad ogni numero

$$0, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

corrisponda un numero naturale n. Immaginiamo quindi di scrivere la serie dei numeri secondo l'ordine anzidetto:

1) $0, a_1 a_2 a_3 \ldots.$
2) $0, b_1 b_2 b_3 \ldots.$
$\ldots\ldots\ldots$

Si possono fare due ipotesi:

α) Nella serie anzidetta si può trovare un numero

$$0, c_1 c_2 \ldots. c_n c_{n+1} \ldots,$$

tale che non esista alcun altro numero della serie

$$0, c_1 c_2 \ldots. c_n c'_{n+1} \ldots,$$

possedente le stesse n cifre decimali $c_1 c_2 \ldots. c_n$ dopo la virgola.

In questa ipotesi la nostra serie non può contenere — come si suppone — *tutti* i numeri reali compresi fra 0 e 1, perchè — essendo $c'_{n+1} \neq c_{n+1}$ — il numero

$$0, c_1 c_2 \ldots. c_n c'_{n+1}$$

non le appartiene.

β) Dato nella serie un numero

$$0, c_1 c_2 c_n \ldots,$$

esistono sempre in essa altri numeri che posseggono le medesime cifre $c_1 c_2 \ldots. c_n$ dopo la virgola e differiscono dal numero dato per qualcuna delle cifre successive.

In questa ipotesi formiamo un numero decimale con infinite cifre nel modo seguente:

prendiamo come prima cifra la prima cifra a_1 del numero 1) della serie;

Digitized by Google

consideriamo fra i termini successivi della serie quello r, più vicino al 1) che comincia colla stessa cifra a_1, e prendiamo altre n_r (≥ 1) cifre di esso fino a comprendere la prima cifra per cui r) diversifica da 1);

consideriamo fra i termini successivi ad r) il primo s) che comincia colle n_r cifre suddette e prendiamone altre n_s (> 1) cifre, fino a comprendere la prima cifra per cui s) diversifica da r); e così di seguito.

È chiaro che per il fatto di cominciare con a_1, il numero decimale che abbiamo costruito non può occupare nella serie data un numero d'ordine compreso fra 1 ed r; ma per il fatto di contenere poi le n_r cifre assegnate esso diversifica da 1) e non può neppure occupare un posto compreso fra r) ed s); quindi, per le n_s cifre successivamente date, esso diversifica da r) e dai numeri successivi ad s) che non cominciano colle $1 + n_r + n_s$ cifre considerate ecc. In ultima analisi si vede che: *il numero decimale illimitato che abbiamo costruito non può appartenere alla serie dei numeri* 1) 2) 3)..., nella quale pure avevamo supposto che trovassero posto *tutti* i numeri reali compresi fra 0 e 1.

Dunque l'insieme dei numeri reali fra 0 e 1 non è numerabile. *A fortiori* non può essere numerabile l'insieme di tutti i numeri reali, giacchè è chiaro che « ogni parte d'un insieme numerabile è numerabile ».

L'insieme dei numeri reali fra 0 e 1 corrisponde all'insieme dei punti d'un segmento (continuo). Perciò si può dire che: l'insieme dei punti d'un segmento non è numerabile; ossia: *il continuo unidimensionale ha una potenza superiore a quella della classe dei numeri naturali.*

§ 47. **Continuo a più dimensioni.** — Introduciamo un simbolo Ω per designare la potenza del continuo rettilineo e fermiamoci un momento a mettere in luce qualche proprietà di questo *numero cardinale infinito.*

Secondo la definizione cardinale del prodotto, Ω^2 designerà la *potenza di un quadrato*, Ω^3 la *potenza di un cubo* ecc.

Ora si ha il teorema (di Cantor):

Il quadrato e il segmento suo lato hanno la stessa potenza, quindi

$$\Omega = \Omega^2 = \Omega^3 = \ldots.$$

Digitized by Google

Consideriamo un quadrato di lato 1. I punti del suo lato essendo forniti dalla frazione continua illimitata

$$\frac{1}{a_1+}\,\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\,\frac{1}{a_4+}\cdots,$$

ad ognuno di essi si può far corrispondere biunivocamente il punto del quadrato che ha per coordinate

$$\frac{1}{a_1+}\,\frac{1}{a_3+}\,\frac{1}{a_5+}\cdots \qquad\qquad \frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_4+}\,\frac{1}{a_6+}\cdots$$

Lo stesso ragionamento si estende al confronto del segmento col cubo ecc.

Risulta quindi che *il continuo a più dimensioni non si distingue dal continuo a una dimensione per la maggiore estensione* (*potenza*) *della classe dei punti o elementi che lo costituiscono, ma per la distribuzione di questi*, che viene data col concetto del continuo suddetto (cfr. § 59).

Parte quarta. — ***I numeri non-archimedei e la generalizzazione del continuo numerico.***

I. — I NUMERI NON-ARCHIMEDEI.

§ 48. **Riassunto delle proprietà dei numeri reali.** — Riassumiamo le principali proprietà dei numeri reali.

1) (*Operazioni*). I numeri reali costituiscono un *corpo* di enti trasformato in se stesso dalle operazioni di *somma* e *prodotto*: $a + b$, ab.

2) (*Proprietà fondamentali delle operazioni*). La somma e il prodotto soddisfano alle proprietà commutativa e associativa:

$$a + b = b + a, \qquad ab = ba$$
$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (ab)c = a(bc),$$

e il prodotto anche alla proprietà distributiva

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Digitized by Google

3) (*Proprietà dello zero*). Esiste un numero ben determinato « lo *zero* (0) », che, per qualunque valore di a, soddisfa alla condizione:

$$a + 0 = a$$
$$(a - a = b - b....).$$

Si ha, qualunque sia a,

$$a0 = 0.$$

Si ha, se

$$ab = 0,$$
$$a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0.$$

4) (*Operazioni inverse*). I numeri reali costituiscono un corpo rispetto all'operazione inversa della somma, cioè è sempre possibile la *sottrazione*: a — b.

I numeri reali, *tolto lo zero*, costituiscono pure un corpo rispetto all'operazione inversa della moltiplicazione, cioè è sempre possibile la *divisione*: $\frac{a}{b}$.

5) (*Ordinamento*). I numeri reali formano una serie ordinata, cioè: se $a \neq b$ o $a > b$ o $b >$ (ossia $a < b$), e se $a > b$, $b > c$, anche $a > c$.

6) (*Continuità*). La serie ordinata dei numeri reali è *continua, nel senso di* DEDEKIND, cioè: se la serie stessa è divisa in due parti (*classi contigue*) per modo che ogni numero appartenga ad *una* delle due parti, ed ogni numero della prima parte sia minore di ciascun numero della seconda, allora esiste un *massimo* della prima parte o un *minimo* della seconda.

(Segue che la serie dei numeri susseguenti ad un dato, o quella dei numeri susseguenti ad un dato e precedenti ad un altro, sono pure continue).

7) (*Numeri positivi*). I numeri reali susseguenti allo 0 (*positivi*, cioè > 0) formano un corpo rispetto alle operazioni di somma, prodotto e divisione.

8) (*Condizione di disuguaglianza o di sottrazione*). Se a, b sono due numeri reali e positivi, ed

$$a > b,$$

esiste fra i numeri reali e positivi la differenza:

$$c = a - b \quad (\text{per cui } a = b + c);$$

Digitized by Google

viceversa se — essendo a, b, c positivi —

$$c = a - b \quad (a = b + c),$$

si ha

$$a > b.$$

9) (*L'unità*). Esiste un numero positivo ben determinato «l'*unità*: 1» tale che, qualunque sia il numero reale a,

$$a1 = a,$$
$$\left(\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \ldots\right).$$

10) (*Gl'interi*). I numeri somme di unità (*interi positivi* o «numeri naturali») formano entro la serie ordinata dei numeri reali una serie *bene ordinata* (in cui ad n succede $n + 1$).

I numeri interi e positivi formano un corpo rispetto alla somma, e soddisfano alla *condizione di disuguaglianza*, cioè: se a e b sono interi positivi ed $a > b$, $a - b$ è un numero intero positivo.

11) (*Proposizione d'*ARCHIMEDE). Dati due numeri reali e positivi a, b, esiste sempre qualche intero positivo n per cui

$$na > b.$$

Queste proprietà dei numeri reali si riattaccano al duplice aspetto in cui essi si presentano, cioè al fatto che la totalità dei numeri reali nasce dall'estensione dei numeri naturali ordinali, ed i numeri reali positivi nascono come estensione dei numeri naturali cardinali; per es. sono essenzialmente *proprietà cardinali* le prop. 7) 8) 11).

L'insieme delle proprietà cardinali dei numeri reali e positivi, corrisponde alla condizione che questi numeri si possano riguardare come «rapporti di grandezza» o come «trasformazioni di un sistema di grandezze in se stesso (moltiplicazioni)»: e ciò per riguardo ad un *sistema di grandezze* caratterizzato dalle seguenti proprietà:

Sommabilità. — Somma commutativa e associativa. — Ordinamento soddisfacente alla condizione di disuguaglianza. — Postulato d'ARCHIMEDE. — Continuità o integrità.

Ora poichè queste proprietà delle grandezze sono anche proprietà dei numeri reali e positivi, così può dirsi che «*i numeri reali*

Digitized by Google

e positivi formano, essi stessi, un (particolare) *sistema di grandezze soddisfacente alle condizioni indicate* ». La maggiore determinazione del sistema dei numeri è in rapporto colla definizione di una seconda operazione oltre la somma : il prodotto, rispetto a cui le grandezze numeriche formano pure un corpo.

La relazione fra numeri e grandezze può anche essere espressa sotto la forma geometrica. La serie dei numeri reali si può porre in corrispondenza biunivoca ordinata coi punti d'una retta, e la serie dei numeri reali e positivi colla serie dei punti d'una semiretta. Allora *le proprietà per cui i numeri reali positivi formano un sistema di grandezze si traducono nei postulati di : congruenza fra segmenti, ordine continuo dei segmenti crescenti, postulato d'*ARCHIMEDE (cfr. Articolo Quinto).

In particolare appare di qui che la prop. d'ARCHIMEDE (11) è conseguenza della continuità nel senso di DEDEKIND (prop. 6). (Cfr. Articolo Quinto).

§ 49. **I trasfiniti di Cantor come numeri non-archimedei.** — Ci proponiamo ora di estendere il concetto del numero reale lasciando cadere la condizione d'ARCHIMEDE, per modo che la serie dei nuovi numeri (*non-archimedei*) comprenda un *infinito* ω o un *infinitesimo attuale* η rispetto all'unità :

$$n < \omega \quad \text{o} \quad n > \eta,$$

per qualunque intero positivo n $(n = n \,.\, 1)$.

Si tratta di vedere fino a che punto si possono conservare pei numeri non-archimedei le proprietà dei numeri ordinari sopra riassunte.

Anzitutto le proprietà dei numeri interi.

Una generalizzazione dei numeri interi positivi è data dai trasfiniti di CANTOR

$$0, 1, 2..., \quad \omega, \omega + 1..., \quad ...,$$

comprendente un infinito attuale ω. Ma abbiamo già osservato che *se si conserva pei trasfiniti di* CANTOR *il concetto ordinale della somma*, ritenendo che $n + \omega$ designi « il numero immediatamente successivo alla serie

$$n + 1, \quad n + 2, \quad ...,$$

si trova

$$1 + \omega = 2 + \omega = ... = \omega,$$

Digitized by Google

e quindi *non vale la proprietà commutativa* della somma

$$1 + \omega \neq \omega + 1.$$

Si può togliere questo inconveniente modificando la definizione della somma, e precisamente ponendo:

$$(a\omega + b) + (c\omega + d) = (a + c)\omega + (b + d).$$

Tuttavia questi trasfiniti non soddisfano interamente alle proprietà (10) dei numeri interi positivi: formano una serie ben ordinata, costituiscono un corpo rispetto alla somma, ma *non verificano la condizione di sottrazione* poichè, pur essendo

$$\omega < b \qquad (b = 1, 2...,),$$

non esiste

$$\omega - b.$$

Se si vuole soddisfatta questa condizione aggiungendo ai precedenti trasfiniti:

$$\omega - 1, \quad \omega - 2, \quad ...,$$

si perde la condizione che i trasfiniti stessi formino una serie ben ordinata, poichè non esiste un minimo della serie decrescente

$$\omega - 1, \quad \omega - 2....$$

Così la proprietà dei numeri interi positivi di formare una serie ben ordinata appare incompatibile colle altre proprietà (10) dei numeri interi positivi in un sistema non-archimedeo.

*Questa incompatibilità di una serie ben ordinata d'interi positivi non-archimedei coi postulati delle grandezze numeriche, si riconduce al legame per cui la condizione d'*ARCHIMEDE *dipende come conseguenza dalla continuità nel senso di* DEDEKIND.

Infatti se si considerano i numeri

$$a\omega + b$$

per b reale ≥ 0 e per a intero e positivo, si ottiene una serie continua nel senso di DEDEKIND (prop. 6), poichè la partizione in classi contigue

$$a\omega + b, \quad b \text{ (per } a > 0)$$

Digitized by Google

ammette (come ogni altra partizione analoga) un numero limite (ω). Ora se la serie suddetta potesse riguardarsi come una serie di grandezze, soddisfacente alla condizione di disuguaglianza, si dedurrebbe la prop. d'ARCHIMEDE, in contrasto coll'ipotesi:

$$\omega > n.$$

Una serie di numeri non-archimedei positivi $a\omega + b$, soddisfacente alla condizione di sottrazione, conterrà non solo i numeri corrispondenti a b positivo, ma anche quelli corrispondenti a b negativo. Una serie siffatta

$$a\omega \pm b, \qquad (b \geq 0)$$

non sarà più continua nel senso di DEDEKIND, ma sarà una *serie continua nel senso del cosiddetto postulato di* CANTOR *se è continua rispetto* a b. Infatti due successioni una crescente e l'altra decrescente di numeri

$$a_n\,\omega + b_n, \qquad a_n'\,\omega + b_n',$$

saranno da ritenere convergenti solo nel caso che — per n assai grande — sia

$$a_n = a_n' = a_{n+1} = a_{n+1}' \ldots = a,$$

e che

$$b_n\, b_{n+1} \ldots, \quad b_n'\, b_{n+1}' \ldots$$

formino successioni convergenti, nel qual caso ammettono il numero-limite $a\omega + \lim b_n$; in ispecie le successioni 1, 2, 3..., ω, $\omega - 1$, $\omega - 2$..., non sono convergenti perchè è $(\omega - n) - n > n$.

Si noti che il sistema $a\omega \pm b$, ove a percorre valori interi, corrisponde al continuo non-archimedeo di cui si è data la rappresentazione geometrica nell'Art. Quinto: sistema di rette parallele prese nell'ordine di successione da sinistra a destra e dal basso all'alto.

Si può generalizzare il sistema stesso facendo *variare anche* a *in modo continuo*. Con ciò non cessa di valere la continuità nel senso di CANTOR-VERONESE e si conservano del pari le proprietà delle grandezze numeriche. A questa estensione si è condotti intanto dalla condizione che *esista*, per a qualunque, *il prodotto* $a\omega$. Ma la condizione che i numeri non-archimedei formino un corpo

Digitized by Google

rispetto ad un'operazione avente le proprietà del prodotto porta altre conseguenze che dobbiamo esaminare più da vicino.

§ 50. **Prodotto di numeri non-archimedei.** — Prendiamo come punto di partenza il sistema non-archimedeo più generale

$$a\omega + b,$$

dove a e b percorrono tutti i valori reali, positivi o negativi, e dove

$$a\omega + b > c\omega + d$$

se

$$a > c$$

o se

$$a = c, \quad b > d.$$

Si tratta di vedere se possa definirsi il prodotto

$$(a\omega + b)\,(c\omega + d)$$

in guisa che il sistema suddetto formi un corpo, e soddisfacendo alle proprietà commutativa, associativa e distributiva.

Evidentemente *una tale definizione dipende dalla posizione*

$$\omega^2 = a\omega + \beta.$$

perchè

$$(a\omega + b)(c\omega + d) = ac\omega^2 + (bc + ad)\omega + bd.$$

Così nella teoria dei numeri complessi ordinari si soddisfa alle condizioni enunciate ponendo

$$\omega^2 = -1.$$

Ma facendo in tal guisa, e in generale se

$$a < 0 \text{ o } a = 0, \beta < 0,$$

non si soddisfa alla condizione 7) che « *i numeri positivi* (> 0) *formino un corpo rispetto al prodotto* ».

Poniamo

$$\omega^2 = a\omega + \beta \quad \text{con} \quad a \geq 0,$$

Digitized by Google

e domandiamoci se l'insieme dei numeri positivi

$$a\omega \pm b \quad (a > 0),$$

può costituire un corpo rispetto al prodotto così definito.

A tal fine si considerino due numeri

$$\omega - x, \quad \omega - y \qquad\qquad (x > 0, y > 0);$$

si avrà

$$(\omega - x)(\omega - y) = \omega^2 - (x + y)\omega + xy =$$
$$= \{a - (x + y)\}\omega + (xy + \beta),$$

e però

$$(\omega - x)(\omega - y) < 0$$

se

$$x + y > a.$$

Dunque *i numeri positivi* $a\omega \pm b$ *con* $a > 0$, *non possono formare un corpo rispetto ad un'operazione che goda delle proprietà del prodotto.*

Nota. — L'ipotesi precedente ($a \geq 0$) è incompatibile anche colle proprietà dello zero rispetto alla totalità dei numeri $a\omega \pm b$: esistono dei *divisori dello zero*, cioè dei numeri diversi da 0 il cui prodotto è 0.

Invero, se $\beta \geq 0$, si può rendere

$$(\omega - x)(\omega - y) = 0,$$

determinando x, y in modo che

$$\omega^2 - (x + y)\omega + xy = 0,$$
$$\{a - (x + y)\}\omega + (\beta + xy) = 0,$$
$$x + y = a \qquad\qquad xy = -\beta;$$

e queste equazioni definiscono dei valori reali di x, y. Se invece $\beta < 0$, si può rendere analogamente

$$(\omega - x)(\omega + y) = 0.$$

§ 51. **Corpo di numeri non-archimedei.** — Abbiamo dimostrato che se si parte da un sistema di grandezze non-archimedeo, contenente una sola specie di unità infinite attuali rispetto all'unità principale, si ottiene un sistema di numeri $a\omega \pm b$ ($a \geq 0$), che non può formare un corpo relativamente ad un'operazione soddisfacente alle proprietà del prodotto. Un corpo di numeri non-archi-

Digitized by Google

medei positivi (in cui si supponga definito il prodotto) deve essere più esteso, e precisamente deve contenere una nuova unità ω^2, infinita d'ordine superiore rispetto ad ω; d'accordo coll'intuizione per cui

$$\omega^2 > n\omega,$$

per $n = 1, 2, 3....$

Ora richiamando le proprietà dei numeri a più unità (Articolo di GIOLI nel vol. II della Parte I di questa raccolta) si ha che un sistema di numeri della forma $a\ \omega^2 + b\omega + c$ non può in alcun caso formare un corpo rispetto a due operazioni cui spettino le proprietà della somma e del prodotto: quindi si è condotti a considerare ω^3 come una nuova unità infinita d'ordine superiore rispetto ad ω^2, e così via di sèguito.

I numeri della forma

$$a_n\,\omega^n + a_{n-1}\,\omega^{n-1} + ... + a_1\,\omega + a_0$$

dove n percorre tutti i valori 0, 1, 2, 3..., e, dentro il sistema di questi, i numeri positivi ($a_n > 0$), danno luogo ad un corpo di numeri non-archimedei soddisfacente alle proprietà della somma e del prodotto, alla continuità nel senso di CANTOR, e alla condizione di disuguaglianza delle grandezze numeriche.

Ma nel sistema anzidetto non è possibile la divisione.

Per rendere possibile la divisione occorre:

1) aggiungere la serie delle unità infinitesime

$$\eta = \frac{1}{\omega}, \quad \eta^2 = \frac{1}{\omega^2} \ldots;$$

2) considerare numeri formati con *infinite unità infinitesime* quali risultano per es. dalla divisione

$$\frac{1}{a + b\omega} = \eta \left\{ b + a\eta \right\}^{-1};$$

sviluppando $(b + a\eta)^{-1}$ colla serie binomiale.

In conclusione *un corpo di numeri non-archimedei positivi, entro cui siano possibili le operazioni di somma, prodotto e divisione, contiene numeri con un numero arbitrariamente grande (ma finito)*

Digitized by Google

di unità infinite e con un numero infinito di unità infinitesime, della forma

$$\alpha) \qquad a_n\omega^n + a_{n-1}\,\omega^{n-1} + \dots + a_1\omega + a_0 + \sum_1^\infty b_m\,\eta^m.$$

La *condizione di continuità* di CANTOR non dice più nulla rispetto a numeri di questa forma, ma essa può surrogarsi colla condizione che «*ogni sistema di numeri formati con un numero finito di unità sia continuo* (*nel senso di* CANTOR).

Questa condizione importa la *continuità rispetto ai coefficienti* $a_0a_1a_2\dots$, $b_1b_2\dots$, alla quale si perviene ugualmente — in base alla possibilità del prodotto — se si suppone che uno solo dei coefficienti *varii* in modo continuo.

Il sistema α) corrisponde ai corpi continui di numeri non-archimedei, contenenti il *minimo sistema* possibile *di unità irriducibili*. Si possono ottenere corpi più generali in cui si considerino anche potenze non intere di ω; tali sono i corpi di numeri di VERONESE (1) e quelli dei *monosenii* di LEVI-CIVITA (2).

Ma, tralasciando questa possibile generalizzazione, noi ci proponiamo di vedere ora come si possa effettivamente costruire un corpo minimo di numeri non-archimedei.

§ 52. **Numeri funzionali non-archimedei.** — Per costruire effettivamente un corpo minimo di numeri non-archimedei soddisfacente alle condizioni indicate innanzi, ricorreremo all'idea genialmente svolta da HILBERT, cui daremo uno sviluppo adatto allo scopo che qui viene proposto.

Consideriamo le funzioni razionali fratte del tipo:

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)} = \frac{a_n\,t^n + \dots + a_1\,t + a_0}{b_m\,t^m + \dots + b_1\,t + b_0}.$$

Due funzioni siffatte

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)},\quad \frac{\chi(t)}{\psi(t)}$$

(1) *Fondamenti di Geometria*, Padova, 1891.

(2) *Sugli infiniti e sugli infinitesimi attuali.* «Atti del R. Istituto Veneto», 1893.

Digitized by Google

si possono confrontare per t assai grande : accade allora che (escluso il caso d' uguaglianza) da un certo punto in poi

$$\frac{f}{\varphi} - \frac{\chi}{\psi} > 0$$

o

$$\frac{f}{\varphi} - \frac{\chi}{\psi} < 0.$$

Nel primo caso scriveremo

$$\frac{f}{\varphi} > \frac{\chi}{\psi},$$

nel secondo

$$\frac{f}{\varphi} < \frac{\chi}{\psi}.$$

Con ciò le funzioni anzidette vengono ordinate in una serie di funzioni crescenti. Gli enti di questa serie (le funzioni) che succedono alla costante 0 (> 0), si possono riguardare come numeri positivi, costituenti un corpo rispetto alle operazioni di somma, prodotto e divisione, definite ponendo :

$$\frac{f}{\varphi} + \frac{\chi}{\psi} = \frac{f\psi + \chi\varphi}{\varphi\psi},$$

$$\frac{f}{\varphi} \cdot \frac{\chi}{\psi} = \frac{f\chi}{\varphi\psi},$$

$$\frac{f}{\varphi} : \frac{\chi}{\psi} = \frac{f\psi}{\chi\varphi}.$$

L' insieme dei numeri-funzioni $\lesseqgtr 0$, forma anche un corpo rispetto alla sottrazione.

Ora i numeri che abbiamo definito sono numeri non-archimedei riducibili alla forma

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0 + \frac{b_1}{t} + \frac{b_2}{t^2} + \dots,$$

ossia

$$a_n \omega^n + a_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + a_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + \dots,$$

dove

$$\omega = t, \quad \eta = \frac{1}{t}.$$

Digitized by Google

NOTA. — Una critica adeguata dei lavori precedentemente citati, e specialmente di HILBERT, ha condotto SCHÖNFLIES a questa forma dei numeri non-archimedei, che abbiamo dimostrato nel § 51.

Riguardo all'*estensione* del corpo così definito, avvertiamo che pei numeri hilbertiani *si possono assumere ad arbitrio quanti si vogliano coefficienti*

$$a_n, a_{n-1} \ldots, a_0, b_1, b_2, \ldots, b_m,$$

ma *non la serie infinita*

$$b_1 b_2 \ldots.$$

Si può generalizzare i numeri funzionali suddetti, considerando *le più generali serie convergenti*

$$a_n t^n + \ldots + a_0 + \sum_1^\infty b_m t^{-m}$$

(anche non nascenti dalla divisione di funzioni razionali fratte) e comparandole nel modo indicato innanzi per le funzioni razionali. Allora la serie dei coefficienti

$$b_1 b_2 \ldots.$$

si può assumere ad arbitrio compatibilmente con certe disuguaglianze.

È lecito del resto togliere anche questa restrizione, considerando le *serie divergenti* $\Sigma b_m t^{-m}$, purchè si modifichi il modo di confronto di

$$\Sigma b_m t^{-m}, \quad \Sigma c_m t^{-m},$$

cercando quale sia il segno della differenza

$$\sum_1^n b_m t^{-m} - \sum_1^n c_m t^{-m},$$

per n *e* t *crescenti, dove* t *si faccia crescere assai rapidamente rispetto ad* n.

Digitized by Google

§ 53. **Confronto dei numeri non-archimedei coi numeri reali.** — Confrontiamo i numeri non-archimedei costruiti testè come numeri funzionali (hilbertiani) coi numeri reali ordinari, tenendo presenti le proprietà 1) .... 11) di questi, enunciate al § 48. Vediamo allora che i nostri numeri non-archimedei soddisfano come i numeri reali alle condizioni 1) 2) 3) 4) 5) 7) 8) 9) cioè:

L' insieme dei numeri non-archimedei forma un corpo rispetto alle operazioni di somma e prodotto 1) e alle loro inverse, sottrazione e divisione 4); quelle operazioni danno luogo alle proprietà commutativa, associativa e distributiva 2) e alle proprietà dello zero 3) e dell' unità 9).

L' insieme dei numeri non-archimedei è ordinato per numeri crescenti in guisa che fra due numeri disuguali ne esiste sempre qualcuno maggiore dell' uno e minore dell'altro 5). I numeri non-archimedei seguenti allo zero (positivi) formano un corpo rispetto alla somma, al prodotto e alla divisione 7) e soddisfano alla condizione di sottrazione delle grandezze 8).

L'abbandono della condizione d'Archimede 11) ci ha portato a *modificare necessariamente* le proprietà 6) 10).

Non vale per la serie dei numeri non-archimedei la continuità nel senso di Dedekind 6). In luogo di essa si ha che *ogni sistema di numeri formato con un numero finito d'unità irriducibili infinite ed infinitesime è continuo nel senso di* Cantor *e però integro* (i coefficienti percorrono tutti i valori reali). La condizione d' integrità si può render soddisfatta — come si è detto — anche per il sistema dei numeri formati con infinite unità.

I numeri non-archimedei interi e positivi:

$$a_n \omega^n + \dots + a_0 + \Sigma b_n \eta^n$$

(con a, b interi, $a_n > 0$) *non formano più una serie ben ordinata* 10), ma costituiscono sempre un corpo rispetto alla somma e al prodotto.

In sostanza tutte le proprietà cardinali dei numeri reali (eccezione fatta per la prop. d'Archimede) appartengono ai nostri numeri non archimedei; le proprietà ordinali si estendono solo in parte, modificandosi le 6) 10).

Digitized by Google

II. — Su alcune possibili interpretazioni dei numeri non-archimedei.

§ 54. **Ordini d' infinito di Du Bois Reymond.** — Nella teoria dell'accrescimento delle funzioni di Du Bois Reymond si sogliono confrontare gli *ordini d' infinito* o *d' infinitesimo delle funzioni* d'una variabile t, crescenti o decrescenti oltre ogni limite (ad es. per $t = \infty$). Essendo $f(t)$ e $\varphi(t)$ due funzioni crescenti si cerca se

$$\lim_{t=\infty} \frac{f(t)}{\varphi(t)} = \infty$$

$$\lim_{t=\infty} \frac{f(t)}{\varphi(t)} = \text{cost } (\neq 0)$$

$$\lim_{t=\infty} \frac{f(t)}{\varphi(t)} = 0;$$

nei tre casi si dice rispettivamente che l'ordine d' infinito di f è maggiore, uguale o minore di quello di φ.

Analogamente si dica per gli ordini d' infinitesimo salvo lo scambio delle parole « maggiore » e « minore ».

In particolare gli ordini d' infinito delle funzioni

$$a_1 t + a_0, \quad a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \ldots,$$

sono rispettivamente uguali a quelli di

$$t, t^2 \ldots,$$

e si lasciano rappresentare coi numeri naturali

$$1, 2 \ldots.$$

La costante a_0 può considerarsi come un *infinito d'ordine* 0; e gl' infinitesimi

$$\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2} \ldots,$$

come *infiniti d'ordine negativo*

$$-1, -2 \ldots.$$

Digitized by Google

Si possono *considerare ordini d'infinito fratti ed irrazionali* corrispondenti a potenze t^x con x fratto o irrazionale.

Ma *i numeri reali non esauriscono la serie dei possibili ordini d'infinito delle funzioni.*

Infatti:

1) l'ordine d'infinito di alcune funzioni per es. di e^t è superiore ad ogni numero reale e positivo n:

$$\lim_{t=\infty} \frac{e^t}{t^n} = \infty;$$

2) l'ordine d'infinito di alcune funzioni, per es. di $\log t$, deve ritenersi > 0 ma inferiore ad ogni numero reale e positivo n:

$$\lim_{t=\infty} \frac{\log t}{t^n} = 0;$$

3) esistono funzioni crescenti il cui *ordine d'infinito* è *incomparabile* perchè $\frac{f(t)}{\varphi(t)}$ per t crescente può non tendere ad un limite ed oscillare fra 0 e ∞.

Supponiamo di aver delimitato un corpo di funzioni comprendente t^x per x reale qualsiasi, i cui ordini d'infinito siano comparabili. Questi ordini d'infinito, in cui si trovano infiniti ed infinitesimi attuali rispetto ad 1, costituiscono una *classe di grandezze non-archimedee*; potranno riguardarsi come numeri soddisfacenti alle proprietà indicate nel precedente paragrafo?

Si tratta per ciò di vedere come possano definirsi la *somma* e il *prodotto* di due ordini α, β.

La somma si definisce subito: se

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{ord. inf. } f(t) \\ \beta &= \text{ord. inf. } \varphi(t), \\ \alpha + \beta &= \text{ord. inf. } f\varphi; \end{aligned}$$

e rimangono soddisfatte le proprietà associativa e commutativa

Postulando ora la proprietà distributiva del prodotto si avrà per n intero e positivo

$$n\alpha = \text{ord. inf. } f^n(t),$$

formula che per estensione conduce alla definizione generale de prodotto:

$$\beta\alpha = \text{ord. inf. } \varphi\{f(t)\}.$$

Digitized by Google

Ma *il prodotto così definito non gode della proprietà commutativa*, giacchè, ponendo per es.

$$\lg = \text{ord. inf. } \log t,$$

si avrà

$$\begin{aligned} n \lg &= \text{ord. inf. } \log {}^n t \\ \lg \cdot n &= \text{ord. inf. } \log t^n \\ &= \text{ord. inf. } n \log t, \end{aligned}$$

mentre

$$\lim_{t=\infty} \frac{\log {}^n t}{n \log t} = 0,$$

sicchè

$$n \lg < \lg \cdot n.$$

§ 55. **Probabilità.** — I numeri non-archimedei trovano applicazione in un problema di probabilità che qui citiamo a titolo di esempio d' una classe più generale. Si supponga di far cadere un punto P entro un quadrato, e si postuli che:

1) date nel quadrato due *aree equivalenti* vi sia *uguale probabilità* che P cada nell' una o nell'altra;

2) date due *linee di ugual lunghezza* vi sia pure *ugual probabilità* che P cada sull' una o sull'altra.

Ciò posto si consideri la probabilità che P cada in un luogo $S + s$ contenuto nel quadrato e costituito da un'area S (contorno in luso) e da una linea s fuori di S; questa *probabilità è espressa da un numero della forma*

$$a + b\eta,$$

dove $0 < a < 1$, ed η è un infinitesimo.

Se $c + d\eta$ corrisponde alla probabilità che P cada in un luogo analogo $S' + s'$, la *somma*

$$(a + b\eta) + (c + d\eta) = (a + c) + (b + d)\eta$$

corrisponde alla probabilità che P cada entro

$$S + S' + s + s',$$

supposto tuttavia che S, S', s, s' non abbian parti comuni; questa

Digitized by Google

condizione può sempre soddisfarsi sostituendo ad S', s' un'area equivalente e una linea d' ugual lunghezza, purchè sia

$$a + c < 1.$$

Il *prodotto*

$$(a + b\eta)(c + d\eta) = ac + (ad + bc)\eta + bd\eta^2,$$

corrisponde alla *probabilità composta* che lanciando due punti P, Q questi cadono rispettivamente in $S + s$ ed $S' + s'$. Analogamente si definiscono i prodotti di più numeri.

I numeri misuranti le probabilità così definite sono numeri non-archimedei ordinari compresi fra 0 *e* 1, *ma l' interpretazione diventa difettosa per i numeri con coefficienti negativi*

$$a - b\eta.$$

Infatti si consideri un rettangolo A d'area $a < 1$, con un lato l di lunghezza 1 ; si presenta l'idea di misurare con $a - \eta$ la probabilità che un punto cada entro il rettangolo *escluso il lato*; ma allora sommiamo ad A un rettangolo B d'area b $(< 1 - a)$ avente comune con A il lato l ; la probabilità che P cada in $A + B$ viene data da

$$a - \eta + b = a + b.$$

NOTA. — *Per rimuovere quest'inconveniente* si sarebbe indotti a porre opportune convenzioni, operando su *aree prive di una parte del contorno* che possono sommarsi dando luogo ad aree analoghe ; ad esempio le aree rettangolari colla base orizzontale private di due lati consecutivi (a destra e in alto) soddisfano a tale proprietà.

§ 56. **Angolo di due curve.** — Due curve tangenti, ad es. un cerchio con una sua tangente, formano un angolo che non può dirsi nullo ma è inferiore ad ogni angolo rettilineo (come già osservava EUCLIDE). Questo angolo fu considerato da GIORDANO NUMERARIO (1220) sotto il nome di «angulus contingentiae», e CAMPANO, alla fine del secolo XIII, ebbe ad osservare che esso non è una grandezza della stessa specie degli angoli rettilinei.

Le discussioni intorno alla suddetta grandezza infinitesima, assai vive nel periodo di elaborazione del calcolo infinitesimale,

Digitized by Google

condussero con NEWTON a comparare fra loro gli angoli di contingenza mercè le derivate d'ordine superiore delle funzioni.

Ora possiamo mostrare che gli angoli di contingenza, considerati accanto agli angoli rettilinei ordinari, danno luogo ad un concetto più generale dell'*angolo di due linee* (analitiche) come elemento d'una *classe di grandezze non-archimedee misurabili da numeri della forma*:

$$b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + \dots \qquad (b \geq 0).$$

A tale scopo si considerino due parabole d'ordine $n + 1$, C, C', aventi un contatto d'ordine n nel punto (00):

$$y = a_1x + \dots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1}$$
$$y = a_1x + \dots + a_nx^n + a'_{n+1}x^{n+1},$$

limitandosi agli archi di esse che sono da una parte dell'origine, per es. per $y > 0$.

Le due curve C, C' insieme al cerchio

$$x^2 + y^2 = r^2$$

determinano un'area $a(r)$ che diventa infinitesima d'ordine $n + 1$ con r; il $\lim\limits_{r=0} \frac{a(r)}{r^{n+1}} = b$ corrisponderà alla *misura dell'angolo di* C, C', che si assumerà per definizione data da $b\eta^n$.

In particolare si può così esprimere l'angolo di contingenza di una parabola C:

$$y_1 = a_1x + a_{n+1}x^{n+1},$$

colla retta: $\qquad y_1 = a_1x$

che ha con essa un contatto d'ordine n, o l'angolo di contingenza di una parabola C:

$$y = a_1x + \dots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1},$$

con la parabola C':

$$y = a_1x + \dots + a_nx^n,$$

Digitized by Google

questa retta o curva C' venendo considerata come una parabola d'ordine $n + 1$ corrispondente ad

$$a'_{n+1} = 0.$$

Ciò posto si può definire in generale l'angolo di due qualsiansi curve analitiche

$$y_1 = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$
$$y_1 = a'_1 x + a_2' x^2 + \dots,$$

passanti per l'origine 0 e considerate da una parte di 0 (ad es. per $y > 0$).

Questa definizione si lascia ridurre, mediante somma e differenza, al caso più semplice dell'angolo compreso fra una curva

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

ed una retta

$$y_1 = a_1' x;$$

il quale si esprime mediante un numero della forma:

$$b_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + \dots,$$

determinando b_0, b_1, b_2.... nel modo seguente:

1) b_0 è l'angolo delle due rette

$$y = a_1 x, \quad y = a_1' x;$$

2) $b_1 \eta$ è l'angolo di contingenza della parabola

$$y = a_1 x + a_2 x^2$$

colla sua tangente

$$y = a_1 x,$$

preso positivamente o negativamente secondochè l'elemento di parabola che si considera si trova da parte opposta della retta $y = a_1' x$ rispetto alla tangente suddetta, oppure dalla medesima parte;

3) $b_2 \eta^2$ è l'angolo di contingenza delle parabole osculatrici

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$
$$y = a_0 x + a_2 x^2,$$

Digitized by Google

preso negativamente o positivamente secondochè esso è contenuto o no nell'angolo determinato dalla seconda parabola colla retta $y = a_1' x$ ecc.

Con ciò si ha una semplice interpretazione geometrica dei numeri non-archimedei

$$b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + \ldots.$$

come misure delle grandezze di un sistema; ma in questo sistema non vi sono grandezze corrispondenti ai numeri infiniti ω, ω^2.... che nascerebbero dalla divisione dei precedenti

$$\left(\omega = \frac{1}{\eta}, \quad \omega^2 = \frac{1}{\eta^2} \text{ ecc.}\right).$$

III. — Condizioni che caratterizzano il continuo numerico come serie ordinata.

§ 57. **Condizioni di riferibilità d'una serie continua al continuo numerico.** — Colla costruzione dei numeri non-archimedei abbiamo investigato particolarmente le proprietà cardinali dei numeri reali, ponendone in luce i legami. Ora vogliamo studiarne più profondamente le proprietà ordinali, analizzando le condizioni che caratterizzano il continuo numerico come serie ordinata.

Una *serie* Σ di elementi si dirà *continua* se:

1) è dato in essa un ordine degli elementi che non ammette primo nè ultimo elemento, e tale che fra due elementi vi è sempre qualche elemento intermedio;

2) l'ordine della serie Σ soddisfa al postulato di Dedekind, cioè ogni partizione della serie in classi contigue è operata mediante un elemento di separazione, che è primo elemento di una delle parti o ultimo dell'altra.

Ora si ha il teorema di Cantor (1):

Affinchè una serie continua di elementi, Σ, si possa porre in corrispondenza ordinata colla serie dei numeri reali (continuo numerico) è necessario e sufficiente che si possa determinare in Σ

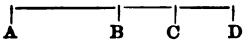
(1) Cfr. G. Cantor, «Math. Annalen», 46, 1895.

Digitized by Google

un insieme di elementi, S, *numerabile e ovunque denso sopra* Σ, cioè tale che fra due elementi di Σ vi sia sempre qualche elemento di S.

La condizione precedente è evidentemente necessaria. Dimostriamo che è sufficiente. A tale scopo notiamo che — nell' ipotesi fatta — la serie numerabile S (ordinata secondo l'ordine di Σ) è tale che fra due elementi di essa vi è certo qualche elemento di S, quindi si può porre in corrispondenza ordinata colla serie dei numeri razionali (§ 30); ma poichè S è densa su Σ, questa riesce in corrispondenza ordinata colla serie dei numeri reali.

Nota. — Si abbia una serie continua Σ cui appartenga una serie numerabile S, tale che fra due elementi di S vi sia sempre qualche elemento di S. Se S non è ovunque densa sopra Σ non segue che Σ possa riferirsi ordinatamente al continuo numerico. Ma non segue neppure il contrario. L'unica deduzione che se ne trae è che « S è contenuta in una serie minima Σ' riferibile al continuo numerico, che è parte di Σ ». Così ad es. si consideri un gruppo numerabile di punti S, ovunque denso sopra l'insieme dei segmenti AB, CD (vedi figura) e si supponga che tutt'al più uno dei due estremi B, C appartenga ad S; in questo caso Σ' è costituito dall'insieme dei due segmenti $AB + CD$, escluso uno degli estremi B, C; Σ' è il segmento AD di cui $AB + CD$ è una parte.



§ 58. **Ordine continuo di specie superiore al continuo numerico.** — Ora nasce la questione se la condizione di Cantor, cioè l'esistenza d'un insieme di elementi numerabile e ovunque denso su Σ, sia o no conseguenza dell'ipotesi che Σ sia una serie continua, in altre parole « se ogni serie continua possa o no riferirsi al continuo numerico ». Ben inteso che la serie continua è definita nel modo ordinale colle condizioni 1) 2) del numero precedente, prescindendo da ogni *relazione* (come la *congruenza* pei segmenti rettilinei) che permetta di ritenere Σ una serie di grandezze.

A tale questione si risponde negativamente costruendo *un ordine continuo di specie superiore al continuo numerico*, cioè « una serie ordinata per modo che fra due elementi qualsiansi di essa vi sia sempre qualche elemento intermedio e che ogni partizione in classi contigue sia operata mediante un elemento di separazione

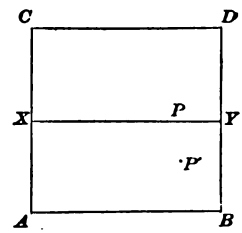
Digitized by Google

(continuità di DEDEKIND), ma pur tale che non possa farsi corrispondere ordinatamente alla serie dei numeri reali » (1).

A questo scopo consideriamo un quadrato $ABCD$ (vedi fig.). I punti di questo quadrato verranno ordinati in questa guisa:

1) dati due punti P, P' si dirà che P *segue* a P' se P si trova *più alto* di P' (più distante dal lato AB);

2) se P, P' appartengono ad uno stesso segmento XY parallelo ad AB, cioè sono ugualmente alti, si dirà che P *segue* a P' se P si trova *a destra* di P' (più lontano da AB).



Si ottiene così una serie ordinata di punti Σ, che ha come primo elemento A e come ultimo elemento D.

L'ordine è tale che fra due punti vi è sempre qualche punto intermedio, ed è continuo nel senso di DEDEKIND perchè per ogni partizione della serie in classi contigue esiste un segmento XY parallelo ad AB tale che:

a) la partizione stessa dà luogo ad una partizione analoga sopra XY, e allora vi è su questo segmento un punto di separazione (ultimo elemento della classe inferiore o primo della separazione);

b) oppure i punti della classe superiore sono i punti più alti di XY, e allora Y è l'ultimo elemento della classe inferiore;

c) oppure i punti della classe inferiore sono i punti più bassi di XY, e allora X è primo elemento della classe superiore.

L'ordine della serie Σ gode così delle proprietà che spettano all'ordine di un ordinario segmento MN; togliendo gli estremi AD, si ha un ordine Σ' analogo a quello dei punti di una retta.

Si tratta di dimostrare che « non si può porre una corrispondenza ordinata fra i punti di Σ e i punti d'un segmento MN, o fra i punti di Σ' e i punti d'una retta ».

La seconda tesi si riconduce alla prima perchè i punti d'una retta si possono proiettare sui punti d'un semicerchio dal centro di questo, e quindi il semicerchio si lascia proiettare sopra un segmento rettilineo MN da un punto del semicerchio complementare.

Supponiamo dunque che si abbia una corrispondenza ordi-

(1) Cfr. ENRIQUES, « Rendiconti della R. Accad. di Bologna », 1911.

Digitized by Google

nata fra i punti di Σ e i punti d'un segmento MN, avente una certa lunghezza l. Ad ogni segmento XY del quadrato $ABCD$, parallelo ad AB ed avente i vertici su AC e BD rispettivamente, corrisponde un segmento $X'Y'$ contenuto in MN; ed a segmenti XY che si succedono per altezza crescente nel quadrato, corrispondono segmenti $X'Y'$ successivi senza punti comuni entro MN.

Ciò posto si consideri un intero positivo n arbitrariamente dato: fra le immagini di segmenti analoghi ad XY entro MN, ve ne sono certo *meno di* n, la cui lunghezza è $\geq \frac{l}{n}$.

Pertanto i segmenti XY paralleli ad AB si lasceranno classificare come segue:

1) un primo gruppo, contenente al più 1 segmento, la cui immagine in MN è $\geq \frac{l}{2}$;

2) un secondo gruppo, contenente al più 2 segmenti, la cui immagine in MN è $\geq \frac{l}{3}$;

. . . . . .

n) un n^o gruppo, contenente al più $n-1$ segmenti, la cui immagine in MN è $\geq \frac{l}{n}$;

. . . . . .

La serie dei gruppi così formata comprende certo *tutti* i segmenti XY poichè ciascun di questi ha un'immagine non nulla in MN. Di più i segmenti dello n^o gruppo si possono prendere in un determinato ordine di successione, per es. nell'ordine secondo cui si succedono in Σ. Con ciò la serie dei segmenti XY viene fatta corrispondere ordinatamente alla serie dei numeri naturali. Ma questa conclusione è assurda poichè l'anzidetta serie, come l'insieme dei punti X del segmento AC, ha una potenza superiore ad un gruppo numerabile. c. d. d.

§ 59. **Continuo a più dimensioni.** — L'esempio addotto nel numero precedente, mostra l'indipendenza dei tre postulati che, secondo il § 57, caratterizzano il continuo numerico come serie ordinata, cioè delle condizioni 1) 2) inerenti alla continuità della serie, e della condizione di Cantor affermante l'esistenza d'un insieme denso e numerabile di elementi.

Digitized by Google

Invero quest'ultima condizione è di natura speciale e diversa dalle altre due; data una serie continua come puro ordine, non si ha in essa alcuna operazione costruttrice d'un tale insieme, alcun legame fra la scelta d'un insieme siffatto (nell'ipotesi che esista) e il concetto della serie data.

Si potrebbe presumere che questa difficoltà, relativa alla definizione del continuo numerico come serie ordinata o *varietà ad una dimensione* (in senso astratto = *linea*), si rispecchiasse ugualmente nella definizione delle *varietà continue a due o più dimensioni*, che si trovano in corrispondenza continua col continuo numerico (xy) o (xyz) ecc.

Invece la definizione del continuo a più dimensioni si presenta sotto un nuovo punto di vista.

Limitiamoci ad indicare il teorema fondamentale che concerne la definizione genetica del continuo a due dimensioni (astrattamente = *superficie*) (1).

Anzitutto si *postuli* che: Gli elementi «*punti*» di una *superficie* v_1 (semplicemente connessa, aperta) si possono distribuire in una *distribuzione reticolare* costituita da *due fasci di linee generatrici* v_1 per modo che:

1) Ogni v_2 sia una serie continua (nel senso di DEDEKIND = ipotesi 1) 2) del § 42);

2) Ogni punto di v_2 appartenga ad *una* linea d'un fascio e ad *una* dell'altro;

3) Una linea d'un fascio e una dell'altro abbian comune *un* punto (intersezione);

4) Tre linee d'un fascio intersechino due linee dell'altro in punti che si susseguono nel medesimo ordine sulle due linee.

(Segue il concetto d'*intorno* d'un punto su v_2 rispetto alla distribuzione reticolare considerata e quindi di *punto limite* di una serie di punti, sempre relativo alla distribuzione suddetta).

5) Due distribuzioni reticolari diverse di v_2 siano tali che un punto limite d'una serie rispetto all'una sia pure limite della serie stessa rispetto all'altra distribuzione.

Questi postulati definiscono il concetto della superficie v_2 *come*

(1) Cfr. F. ENRIQUES, *Sulle ipotesi che permettono l'introduzione delle coordinate....* «Rendiconti Circolo Mat. di Palermo», 1898. Cfr. pure l'Art. III, I di F. ENRIQUES nella «Encyclopedie der Math. Wissenschaften», n. 15.

Digitized by Google

concetto astratto in ordine alle trasformazioni continue (conservanti i punti limiti).

Si accordi ora il postulato esistenziale:

6) *Esistono in* v_2 *almeno tre fasci di linee generatrici unisecantisi*, che combinati a coppie dan luogo a (tre) diverse distribuzioni reticolari di v_2.

In base a questo postulato esistenziale si può porre una corrispondenza continua fra i punti di v_2 *e le coppie di numeri* (x, y), in modo che le linee di due dei fasci considerati vengano rappresentate da $x = \text{cost}$, $y = \text{cost}$.

Ciascuna di queste varietà unidimensionali v_1 risulta riferibile al continuo numerico $\{(y)$ o $(x)\}$ per il fatto di assere generatrice di un continuo duodimensionale, *che ammette generazioni diverse*, quantunque non si sia postulato in principio, per la v_1 stessa, l'esistenza d'una serie numerabile e densa secondo l'ipotesi di CANTOR.

§ 60. **Osservazioni finali.** — Nell'analisi del concetto di numero siamo partiti da due operazioni logiche fondamentali:

1) *riunire* o *associare* più oggetti dati in una classe;

2) *ordinare* più oggetti dati in una serie.

A queste due operazioni si riattacca la genesi dei due concetti di *numero cardinale* ed *ordinale*; la serie dei numeri naturali risulta già dal subordinare a queste operazioni i dati elementari di ogni pensiero dotato di *riflessività* su se stesso.

Lo sviluppo del concetto di numero ci mostra in qual modo si riesca a subordinare progressivamente alle stesse operazioni fondamentali del riunire e dell'ordinare, delle intuizioni che sono suggerite alla nostra mente da realtà esterne sempre più vaste, quali sono specialmente le intuizioni geometriche elaborate nei concetti di grandezza e di linea (superficie ecc.).

Appaiono quindi in luce le condizioni in cui i concetti generalizzati del numero cardinale ed ordinale si possono unificare in una veduta più astratta.

Questo processo d'unificazione e d'astrazione è parte integrante dell'adattamento che si compie nello sviluppo storico dei concetti. Infatti su questa base si è costituita la Matematica moderna, identificando — dopo DESCARTES — l'Analisi e la Geometria nella Geometria analitica.

Sarebbe errore storico e logico non vedere in siffatta identifi-

Digitized by Google

cazione che « un metodo di soluzione dei problemi geometrici come applicazione dell'Analisi ». La Geometria analitica ha avuto ed ha altrettanto valore per l'Analisi che per la Geometria, foggiando in modo più generale i concetti analitici sulle intuizioni geometriche: ciò appare lumeggiato negli sviluppi successivi del Calcolo infinitesimale, e nella formazione di alcune fra le più alte teorie dell'Analisi moderna (teoria dei gruppi di trasformazione di S. Lie, teoria delle funzioni algebriche, curve, superficie, ecc.).

Così, la critica delle nozioni fondamentali e lo studio dei rapporti annodantisi fra le più evolute dottrine matematiche, la filosofia e la storia, conducono ugualmente ad una veduta unificatrice, avversa al particolarismo scientifico che pretende classificare entro quadri rigidamente distinti i vari ordini di concetti, costruiti a rappresentare una medesima realtà.

Digitized by Google

Digitized by Google

INDICE

Digitized by Google

Digitized by Google

PREFAZIONE . . . . . Pag. V

ARTICOLO PRIMO.

F. ENRIQUES. – **L'evoluzione delle idee geometriche nel pensiero greco: punto, linea e superficie.**

§ 1. Gli « Elementi » d' Euclide » . . . . . Pag. 1
§ 2. Le origini della geometria greca: fonti per la ricostruzione storica. 2
§ 3. Apporti della cultura egiziana ed orientale 4
§ 4. Ordine delle principali scoperte 7
§ 5. I concetti fondamentali della geometria pitagorica 11
§ 6. La critica eleatica 15
§ 7. Origini dell'analisi infinitesimale: la quadratura del cerchio e Ippocrate di Chio 18
§ 8. Sviluppo dell'analisi infinitesimale da Democrito a Eudosso e Archimede 20
§ 9. Il concetto della linea e la polemica antimatematica dei sofisti . 25
§ 10. Le definizioni del punto, della linea e della superficie presso i geometri del IV secolo a. C. 28
§ 11. Sull'ordinamento logico della scienza greca: definizioni, assiomi e postulati 29
§ 12. I criteri della logica moderna 32
§ 13. I principî della geometria rispetto all' intuizione 36
§ 14. I concetti di punto, linea e superficie davanti alla critica moderna 39

ARTICOLO SECONDO.

U. AMALDI. – **Sui concetti di retta e di piano.**

I.

§§ 1, 2, 3. Le definizioni della retta . . . . . Pag. 42
§§ 4, 5, 6. Le definizioni del piano 47
§§ 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. Sviluppi di Bolyai e Lobatschefskij . 52
§§ 16, 17, 18, 19. Retta e piano in rapporto al gruppo dei movimenti. 60

Digitized by Google

II.

§§ 20, 21. Postulati di appartenenza . . . . . Pag. 65
§§ 22, 23, 24, 25, 26. Proprietà lineari della retta 67
§§ 27, 28, 29, 30, 31. Proprietà superficiali del piano 71
§§ 32, 33, 34. I versi di rotazione del piano 78
§§ 35, 36, 37. L' indirizzo del Pasch 85
§§ 38, 39, 40, 41, 42, 43. Sulle partizioni del piano 89
§ 44. Il diedro. 95
§ 45. Sulle partizioni dello spazio 97
§ 46. Versi elicoidali dello spazio 100
§§ 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55. I postulati di appartenenza e di ordine nella geometria proiettiva 100

ARTICOLO TERZO.

A. Guarducci. - Della Congruenza e del Movimento.

§ 1. La trattazione Euclidea . . . . . Pag. 109
§ 2. Il significato della congruenza 112
§ 3. Analisi del concetto di movimento 114
§ 4. La congruenza presa come nozione primitiva 120
§ 5. Il sistema di postulati di Pasch 120
§ 6. Il sistema di Veronese 125
§ 7. Il sistema di Hilbert 129
§ 8. Principali proposizioni sulle perpendicolari 133
§ 9. Congruenza delle figure in generale 136
§ 10. Diedri e triedri 137

ARTICOLO QUARTO.

† G. Vailati. - Sulla teoria delle proporzioni.

I. - Le proporzioni secondo Euclide.

§ 1. Definizioni . . . . . Pag. 143
§ 2. Sul cosiddetto postulato d'Archimede 146
§ 3. Primo gruppo di proposizioni 147
§ 4. Secondo gruppo di proposizioni 149
§ 5. Terzo gruppo di proposizioni 150
§ 6. Proporzioni di segmenti ed aree 150
§ 7. Ulteriori sviluppi: ragione composta 152
§ 8. Applicazioni ai problemi di 2° grado 154
§ 9. Volumi 157
§ 10. Critiche e varianti di testi 157
§ 11. Questioni di ordinamento 161

Digitized by Google

II. - Ulteriori sviluppi della teoria.

§ 12. Sulla tendenza della geometria greca ad emanciparsi dalle proporzioni . . . . . Pag. 163
§ 13. Giordano Vitale da Bitonto 164
§ 14. Hermann Grassmann 167
§ 15. L. Rajola Pescarini 171
§ 16. R. Hoppe 175
§ 17. Seconda trattazione dell' Hoppe-G. Biasi 178
§ 18. La teoria geometrica delle proporzioni indipendente dalle considerazioni d'equivalenza 180
§ 19. Semplificazioni relative al teorema dell' invertibilità dei medi . 185
§ 20. Uso di considerazioni stereometriche 189

ARTICOLO QUINTO.

G. Vitali. - **Sulle applicazioni del postulato della continuità nella Geometria elementare.**

§ 1. Introduzione . . . . . Pag. 193
§ 2. Il postulato della continuità della retta 194
§ 3. Divisibilità del segmento e delle grandezze continue 198
§ 4. Postulato d'Archimede 200
§ 5. Di altre forme del postulato della continuità. Continuo non-archimedeo 200
§ 6. Continuità dell'angolo e del piano 204
§ 7. Intersezioni di una retta con un circolo 208
§ 8. Intersezioni di due circoli 210
§ 9. Il teorema di Jordan sulla divisione del piano mediante linee chiuse 212
§ 10. Esistenza di un poligono con dati lati inscrittibile in un cerchio . 219
§ 11. Teorema fondamentale della proiettività 222
§ 12. Il teorema fondamentale della proiettività e l'equazione funzionale di Darboux 226

ARTICOLO SESTO.

F. Enriques. - **I numeri reali.**

Parte Prima — I NUMERI NATURALI.

I. - Introduzione storica.

§ 1. Origine del concetto . . . . . Pag. 231
§ 2. Definizioni dei Greci 231
§ 3. I numeri nel Rinascimento 232
§ 4. La critica del secolo XIX 233
§ 5. Indirizzo assiomatico 235
§ 6. Che cos'è logico? 237

Digitized by Google

II. – Il significato empirico dei numeri.

§ 7. Numeri cardinali . . . . . Pag. 238
§ 8. Astrazione e uguaglianza 242
§ 9. Nota critica 244
§ 10. Numeri ordinali 248
§ 11. Confronto fra numeri cardinali e numeri ordinali 250

III. – La serie infinita dei numeri.

§ 12. Concetto razionalistico del numero . . . . . Pag. 252
§ 13. Classi finite e infinite 255
§ 14. Potenza delle classi infinite 257
§ 15. Serie finite e infinite 260
§ 16. Classi finite e principio dell'invarianza del numero 263
§ 17. Il principio d' induzione matematica e i numeri transfiniti . . 266

IV. – Le operazioni fondamentali dell'Aritmetica.

§ 18. Introduzione . . . . . Pag. 272
§ 19. L'addizione 273
§ 20. La sottrazione e lo zero 274
§ 21. La moltiplicazione 276
§ 22. Fondazione dell'aritmetica nel sistema induttivo 279

Parte Seconda. — I NUMERI RAZIONALI.

I. – Estensioni del concetto di numero.

§ 23. Introduzione storica . . . . . Pag. 283
§ 24. Osservazioni sulla teoria analitica 287
§ 25. Rapporti fra la teoria analitica e la teoria sintetica 290

II. – Teorie sintetiche.

§ 26. I numeri negativi . . . . . Pag. 293
§ 27. La serie dei numeri relativi caratterizzata da postulati . . . 297
§ 28. I numeri fratti come rapporti di grandezze commensurabili . . 298
§ 29. Numeri razionali ordinali 304
§ 30. Postulati che caratterizzano la serie razionale 308

Digitized by Google

III. – Teorie analitiche.

§ 31. La teoria delle coppie: numeri relativi . . . . . Pag. 312
§ 32. I numeri fratti definiti per mezzo di « coppie » 314
§ 33. Teoria dei numeri operatori 317
§ 34. Il significato dei numeri estesi secondo Kronecker 320

Parte Terza. — I NUMERI IRRAZIONALI.

I. – Numeri e grandezze.

§ 35. Introduzione storico-critica . . . . . Pag. 322
§ 36. I numeri come rapporti di grandezze 327
§ 37. Continuità e integrità 332
§ 38. Espressione degli irrazionali per frazione continua 334

II. – Numeri irrazionali ordinali.

§ 39. I numeri irrazionali come ascisse dei punti della retta . Pag. 338
§ 40. Somma e prodotto 340
§ 41. Continuità e buon ordinamento di una serie 341

III. – Le teorie analitiche dei numeri irrazionali.

§ 42. La teoria di Dedekind . . . . . Pag. 343
§ 43. Teoria di Méray-Cantor 347
§ 44. Sviluppi che si riattaccano alle idee del Weierstrass 353
§ 45. Calcolo approssimato sui numeri decimali 357

IV. – La potenza del continuo.

§ 46. Continuo numerico. . . . . Pag. 361
§ 47. Continuo a più dimensioni 363

Parte Quarta. — I NUMERI NON-ARCHIMEDEI E LA GENERALIZZAZIONE DEL CONTINUO NUMERICO.

I. – I numeri non-archimedei.

§ 48. Riassunto delle proprietà dei numeri reali . . . . . Pag. 364
§ 49. I trasfiniti di Cantor come numeri non-archimedei 367
§ 50. Prodotto di numeri non-archimedei 370
§ 51. Corpo di numeri non-archimedei 371
§ 52. Numeri funzionali non-archimedei 373
§ 53. Confronto dei numeri non-archimedei coi numeri reali 376

Digitized by Google

II. - Su alcune possibili interpretazioni dei numeri non archimedei.

§ 54. Ordini d' infinito di Du Bois Reymond . . . . . Pag. 377
§ 55. Probabilità 379
§ 56. Angolo di due curve 380

III. — Condizioni che caratterizzano il continuo numerico come serie ordinata.

§ 57. Condizioni di riferibilità d' una serie continua al continuo numerico . . . . . Pag. 383
§ 58. Ordine continuo di specie superiore al continuo numerico 384
§ 59. Continuo a più dimensioni 386
§ 60. Osservazioni finali 388

Digitized by Google

Digitized by Google

CASA EDITRICE NICOLA ZANICHELLI - BOLOGNA

FEDERIGO ENRIQUES

Lezioni di geometria proiettiva

Quarta edizione. In 8° L. 22

Lezioni di geometria descrittiva

Per cura di UMBERTO CONCINA

Terza edizione

Conferenze sulla geometria non euclidea

Per cura di OLEGARIO FERNANDEZ

In 8° L. 3

Scienza e razionalismo

In 16° L. 5

Per la storia della logica

I principii e l'ordine della scienza nel concetto dei pensatori matematici

In 16° L. 18

Problemi della scienza

Un volume in 8°

F. ENRIQUES e O. CHISINI

Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche

Vol. I in 8° L. 25 - Vol. II in 8° L. 50 - Vol. III in 8° L. 65

Periodico di matematiche

STORIA - DIDATTICA - FILOSOFIA

Direttori F. ENRIQUES - G. LAZZERI

Redattori: E. BORTOLOTTI - E. DANIELE - A. PERNA - C. ROSATI

Segretario di Redazione: O. CHISINI

Abbonamento annuo: Italia L. 25 - Estero L. 40

Digitized by Google